

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MÉTHODES D'APPROXIMATION DE LA DENSITÉ TWEEDIE ET
APPLICATIONS EN ACTUARIAT.

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
LEILA ZERROUK

MAI 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Certains professeurs marqueront plus nos esprits que d'autres. Ils aident les étudiants à se surpasser et à prendre confiance en eux. J'adresse mes remerciements à mes deux directeurs de mémoire qui m'ont aidée dans la réalisation de ce mémoire. Je ne sais pas tout simplement comment exprimer ma gratitude à ces deux personnes.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire, M.Jean-Philippe Boucher. Je le remercie pour m'avoir fait confiance et encadrée, et pour m'avoir guidée, encouragée et conseillée. Je le remercie aussi pour sa disponibilité, la gentillesse et la patience qu'il a manifestées à mon égard durant ce mémoire. De même souffle, je le remercie pour son expertise dans le domaine des statistiques et de l'actuariat.

Mes remerciements vont également à M.Michel Adès, co-directeur de mémoire, pour tous les encouragements et conseils, ainsi que pour sa disponibilité. Je le remercie pour son expertise dans les processus stochastiques et pour les nombreuses lectures qu'il a effectuées de mon mémoire à mesure qu'il progresse, et les maintes suggestions qu'il a proposées.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES	xiv
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES	5
1.1 Résolution d'équations non linéaires à l'aide des méthodes numériques	5
1.1.1 La méthode de bisection	5
1.1.2 La méthode de Newton-Raphson	7
1.2 Intégrales numériques	10
1.2.1 Quadrature de Gauss	10
1.2.2 Polynôme de Legendre	10
1.3 Polynôme de Tchebychev et interpolation	13
1.3.1 Polynôme de Tchebychev	13
1.3.2 Les différences divisées et interpolation	14
1.4 Fonctions génératrices et fonction caractéristique	16
1.4.1 Fonction génératrice de probabilité d'une variable aléatoire	16
1.4.2 Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire	16
1.4.3 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire	17
1.4.4 Fonction génératrice des cumulants d'une variable aléatoire	17
1.5 Famille exponentielle naturelle	18
1.6 Famille de dispersion exponentielle	19

1.6.1	Fonction génératrice des moments, espérance et variance d'un EDM	22
1.6.2	Fonction de variance	24
1.6.3	Déviance unitaire	24
CHAPITRE II		
DISTRIBUTION POISSON COMPOSÉE ET DISTRIBUTION TWEEDIE		27
2.1	Distribution de Poisson composée	27
2.1.1	Fonction de répartition et densité de distribution de Poisson composée	28
2.1.2	Fonction génératrice de probabilité d'une distribution de Poisson composée	29
2.1.3	Fonction génératrice des moments d'une distribution de Poisson composée	29
2.1.4	La fonction génératrice des cumulants d'une distribution de Poisson composée.	30
2.1.5	Fonction caractéristique d'une distribution de Poisson composée	31
2.1.6	Espérance et variance d'une distribution de Poisson composée	31
2.1.7	Distribution Poisson-Gamma	32
2.2	Distribution Tweedie	35
2.2.1	Exemples de lois appartenant à la famille Tweedie	36
2.2.2	Densité et fonctions génératrices de la distribution Tweedie . .	38
2.2.3	Invariance au changement d'échelle	41
2.2.4	Loi Khi-deux non centrale à zéro degré de liberté	42
CHAPITRE III		
MÉTHODES D'APPROXIMATION DE LA DENSITÉ TWEEDIE . . .		45
3.1	L'approximation de la densité Tweedie par la méthode d'inversion de Fourier	45
3.1.1	Inversion de Fourier de la fonction caractéristique	46
3.1.2	Approximation de l'intégrale oscillante	59

3.2	L'approximation de la densité Tweedie par la méthode de développement en séries infinies	69
3.2.1	Évaluation de la somme infinie $W(z, \phi, p)$	71
3.3	L'approximation de la densité Tweedie par la méthode de point-selle	81
3.3.1	La précision de la méthode de point-selle	86
3.3.2	L'approximation de la densité de Tweedie par la méthode d'interpolation	88
CHAPITRE IV		
APPLICATIONS EN ASSURANCE		95
4.1	Contexte et données	96
4.2	Analyse empirique	96
4.3	Ajustement de la distribution Poisson-Gamma	99
4.4	Adéquation du modèle	100
4.4.1	Étude des résidus quantiles du modèle ajusté	100
4.4.2	Étude des percentiles	104
4.4.3	Comparaison des estimateurs obtenus par les méthodes d'approximation de la densité Tweedie	107
4.5	Utilisation de la distribution Tweedie en assurance	108
4.5.1	Primes et principes de prime	108
4.5.2	Propriétés des principes de prime	108
4.5.3	Le principe de la prime d'Esscher	111
CONCLUSION		121
BIBLIOGRAPHIE		123

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
1.1	Les composantes de la famille de dispersion exponentielle pour quelques lois de probabilité usuelles, $f_Z(z; \theta, \phi) = \exp \left\{ \frac{\theta z - \kappa(\theta)}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\}$.	21
1.2	Espérance et variance de quelques distributions usuelles appartenant à la famille de dispersion exponentielle en fonction du paramètre canonique θ	23
1.3	Fonction de la variance et déviance unitaire pour quelques distributions appartenant à la famille de dispersion exponentielle. . . .	25
3.1	Comparaison entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier pour les méthodes 1, 2 et 3, avec des zéros exacts, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	57
3.2	L'erreur relative \log_{10} entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier pour les méthodes 1, 2 et 3, avec des zéros exacts, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	58
3.3	Comparaison entre l'erreur relative \log_{10} de la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros exacts et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros approximatifs, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	65
3.4	Comparaison entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode des séries infinies pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	79
3.5	Comparaison entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode de point-selle, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	84
3.6	La différence entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode d'interpolation, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	92
4.1	Statistiques sur les coûts totaux individuels d'assurance.	96

4.2	Comparaison entre les percentiles observés et les percentiles similaires des données simulées pour un échantillon de 1000 observations.	105
4.3	Comparaison des paramètres \hat{p} et $\hat{\phi}$, estimés par la méthode du maximum de vraisemblance pour les quatre approches : inversion de Fourier, séries infinies, interpolation et point-selle.	107
4.4	Calcul de la prime pour différentes valeurs de h	118

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Exemples sur la méthode de bisection.	6
1.2 Exemples de la convergence et des pièges que la méthode de Newton-Raphson peut rencontrer.	11
3.1 Exemple qui illustre la convergence d'une intégrale oscillante. . . .	52
3.2 Comparaison des densités : la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros exacts, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	67
3.3 Graphique de l'erreur relative \log_{10} de la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros exacts et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros approximatifs, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	68
3.4 Densités aproximées par la méthode de développement en séries infinies pour $p = 0.01$, $p = 1.4$, $p = 1.9$, $\phi = 1$ et $\mu = 1$	77
3.5 L'erreur relative \log_{10} de la densité de Tweedie approximée par la méthode des séries infinies, la méthode 3 d'inversion de Fourier, avec des zéros exacts et approximatifs, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	80
3.6 Graphique montrant la différence entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode de point-selle, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$	85
3.7 Précision ρ en fonction de ξ' , pour $p = 1.1$, $p = 1.4$, $p = 1.7$ et $p = 1.9$	89
4.1 Histogramme des coûts totaux individuels d'assurance pour un échantillon de 1000 observations.	97
4.2 Graphiques qui montrent la relation moyenne-variance pour plusieurs permutations.	98

4.3	La fonction de log-vraisemblance profil pour les réclamations individuelles d'assurance. L'estimation du maximum de vraisemblance de p pour un échantillon de 1000 observations est de 1.64, avec un intervalle de confiance à 95% qui est $[1.59, 1.69]$	101
4.4	Résidus quantiles de distribution normale appliqués sur un échantillon de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance.	103
4.5	Résidus quantiles de distribution normale appliqués sur un échantillon de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance.	106
4.6	Graphique qui représente la densité de la distribution Tweedie $f(x)$ et la transformée d'Esscher de cette densité $g(x)$, pour $h = 0.0001$. À partir d'un échantillon aléatoire de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance automobile, nous estimons les paramètres de la densité Tweedie, $\hat{p} = 1.64$, $\hat{\mu} = 536.73$, $\hat{\phi} = 262.18$. Pour mieux voir le rôle de la transformée d'Esscher, les observations qui sont des zéros sont enlevées sur la figure, et la masse de ces observations est de 0.9044.	117
4.7	Graphique représentant la prime d'Esscher Π_X en fonction du paramètre h	119

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES

Π_X	Prime chargée par l'assureur pour couvrir un risque X
$d_0(z)$	Fonction Dirac
$\kappa(\theta)$	Constante de normalisation de la distribution
Ω	Domaine de définition de θ
ϕ	Paramètre de dispersion
$\phi_Y(t)$	Fonction caractéristique d'une variable aléatoire
ρ	Mesure de précision pour la méthode de point-selle
θ	Paramètre canonique
$d(z; \mu)$	Déviance unitaire
EDM	Modèles de dispersion exponentielle
$f[x_i]$	La différence divisée d'ordre zéro d'une fonction f par rapport à x_i
$F_Y^{(k)}(z)$	$k^{\text{ième}}$ convolution de la fonction de répartition $F_Y(z)$ de Y
$f_Y^{(k)}(z)$	$k^{\text{ième}}$ convolution de la fonction de densité $f_Y(z)$ de Y
$G_Y(t)$	Fonction génératrice de probabilité d'une variable aléatoire
$I_1(\cdot)$	Fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 1
$K_Y(t)$	Fonction génératrice des cumulants d'une variable aléatoire
$M_Y(t)$	Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire

NEF Famille exponentielle naturelle

P_n Les polynômes de Legendre

S Domaine de définition de Z

$T_n(x)$ Polynômes de Tchebychev

$u(.)$ Fonction d'utilité de l'assureur

$V(.)$ Fonction de variance

CV Coefficient de variation

MLE Estimateur du maximum de vraisemblance

RÉSUMÉ

La distribution Tweedie est de plus en plus importante dans la recherche actuarielle, et en particulier dans le domaine de l'assurance. Cependant, la densité de la distribution Tweedie n'a pas une forme analytique simple. Ce mémoire porte sur l'approximation numérique de la densité de la distribution Tweedie. L'approximation étudiée est basée sur trois méthodes : l'inversion de Fourier, le développement en séries infinies et la méthode d'interpolation qui est basée sur l'approximation point-selle. La précision de ces méthodes peut être examinée à $p = 1.5$, qui coïncide avec la distribution Khi-deux non centrale, à zéro degré de liberté. Nous constatons que ces méthodes approximent la densité avec précision. Nous présentons enfin un exemple d'application numérique afin de montrer l'utilité de la densité estimée en assurance.

Mots-clés : Famille de dispersion exponentielle, distribution de Poisson composée, distribution Tweedie, inversion de Fourier, développement en séries infinies, point-selle, interpolation, assurance, transformée d'Esscher, prime d'assurance.

INTRODUCTION

Les distributions Tweedie sont très connues et utiles dans plusieurs domaines de recherche tels que l'analyse de survie, les études de dépenses et de consommation, de l'écologie et de la météorologie. La distribution Tweedie est particulièrement utilisée dans la recherche actuarielle, plus précisément dans la modélisation des réclamations d'assurance.

Les distributions Tweedie ont été introduites d'abord dans la littérature par Tweedie (1947-1984) et indépendamment par [Nelder et Baker \(1972\)](#). Depuis, elles ont été largement étudiées par des auteurs comme [Bar-Lev *et al.* \(1986\)](#), [Hougaard \(1986\)](#) et [Jorgensen \(1997\)](#).

Les distributions Tweedie appartiennent à la classe des modèles de dispersion exponentielle qui sont caractérisés par une variance de la forme $Var(Y) = \phi\mu^p$, où μ est la moyenne de la distribution, ϕ est le paramètre de dispersion, $\phi > 0$, et p est l'indice de la distribution.

Généralement les densités des distributions Tweedie n'ont pas une forme fermée, c'est-à-dire que nous ne pouvons pas calculer la densité directement. Quelques distributions particulières, telles que la Normale, correspondant à une distribution Tweedie avec $p = 0$, la Poisson, correspondant à une distribution Tweedie avec $p = 1$, la Gamma, correspondant à une distribution Tweedie avec $p = 2$ et l'Inverse Gaussienne, correspondant à une distribution Tweedie avec $p = 3$, peuvent être exprimées sous forme fermée. Puisque la fonction de vraisemblance de la distribution Tweedie ne peut pas être écrite sous forme fermée, les techniques d'estimation du maximum de vraisemblance sont difficiles à utiliser. L'objectif de

ce mémoire est d'étudier les méthodes d'estimation de la densité Tweedie et de montrer l'utilité de cette densité dans le domaine actuariel, plus précisément en assurance automobile.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au modèle Tweedie avec $1 < p < 2$ où la distribution est continue pour les valeurs positives de la variable, avec une masse discrète pour les valeurs nulles. Dans la modélisation des réclamations d'assurance, ce mélange est le plus largement utilisé. Ce modèle est aussi appelé distribution Poisson-Gamma par [Smyth \(1996\)](#). La masse à zéro représente un assuré qui ne porte aucune réclamation et la composante continue pour les valeurs positives représentent le montant total des réclamations pour ce même assuré.

Nous présentons au premier chapitre certains concepts de base en mathématiques et statistique, particulièrement en analyse numérique, et ces concepts seront utilisés pour l'approximation de la densité Tweedie. Nous poursuivons ensuite au chapitre 2 par une introduction à la distribution Tweedie, en donnant une description de la distribution de Poisson composée, où la distribution Tweedie, avec $1 < p < 2$, est un cas particulier de cette distribution.

Après avoir présenté le modèle Tweedie et les aspects théoriques utilisés, nous présentons au chapitre 3 trois méthodes pour approximer la densité Tweedie : la méthode d'inversion de Fourier, la méthode de développement en séries infinies et la méthode de point-selle.

La méthode des séries infinies consiste à sommer une série infinie en considérant seulement les termes de la série qui contribuent significativement à la somme infinie. Un programme R est utilisé et décrit pour évaluer la densité de Tweedie par cette méthode.

La fonction génératrice des moments de la distribution Tweedie a une expression

analytique simple. La méthode d'inversion de Fourier se base sur la fonction génératrice des cumulants de la distribution Tweedie. Nous utilisons un programme C++ pour l'approximation de la densité de la distribution Tweedie par cette méthode.

Pour la méthode de point-selle, la partie de la densité qui ne peut pas s'écrire sous forme fermée est remplacée par une expression analytique simple. Dans ce cas, un programme R est utilisé pour évaluer la densité Tweedie. Puisque la méthode de point-selle n'estime pas la densité Tweedie avec précision, [Dunn et Smyth \(2001\)](#) ont proposé une méthode pour calculer la précision de la méthode de point-selle en se basant sur les deux méthodes précédentes. Cette méthode utilise les nœuds du polynôme de Tchebychev et l'interpolation polynomiale entre ces nœuds. Cette méthode est appelée méthode d'interpolation.

Pour tester la précision des méthodes étudiées, nous comparons les résultats obtenus avec la densité de la distribution Khi-deux non-centrée à zéro degré de liberté, qui coïncide avec la distribution Tweedie à $p = 1.5$.

Nous terminerons ce mémoire, au chapitre 4, avec une application de la distribution Tweedie en assurance à l'aide d'une base de données réelles qui représentent les totaux des réclamations individuelles d'assurance. Les résultats obtenus montrent que la distribution Tweedie s'ajuste bien aux réclamations d'assurance. Par ailleurs, la densité de Tweedie estimée nous a aidé également à calculer la transformée et la prime d'Esscher.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

L'objectif de ce chapitre est de poser les fondements mathématiques et statistiques nécessaires à la compréhension du travail de recherche réalisé dans le cadre de ce mémoire.

1.1 Résolution d'équations non linéaires à l'aide des méthodes numériques

La méthode de bisection et la méthode de Newton-Raphson servent à trouver les racines d'une fonction, ce qui est équivalent à trouver la valeur de x pour laquelle l'équation $f(x) = 0$. Dans ce mémoire, ces méthodes seront utiles dans l'approximation de la densité Tweedie par la méthode d'inversion de Fourier, discutée dans le chapitre 3.

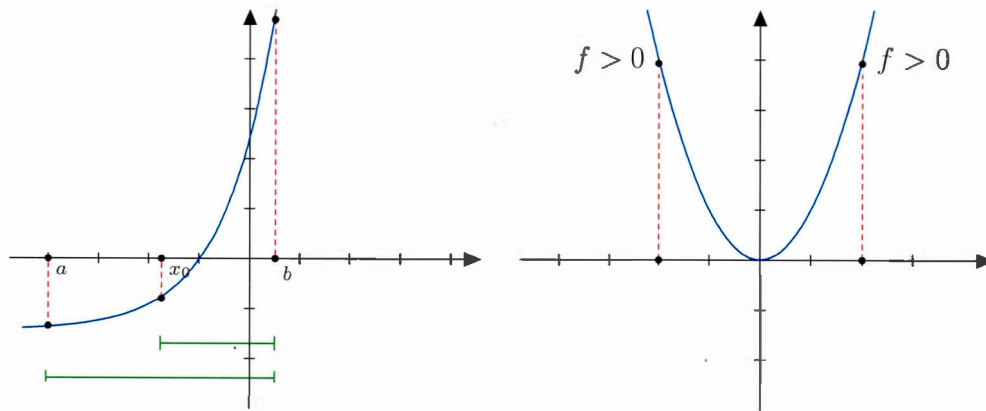
1.1.1 La méthode de bisection

Nous utilisons la méthode de bisection pour s'approcher de la racine d'une fonction. La méthode de bisection est aussi appelée méthode de dichotomie. C'est une méthode simple qui permet de trouver une racine d'une fonction f quelconque à l'aide d'un intervalle $[x_1, x_2]$ pour lequel $f(x)$ possède un changement de signe. L'intervalle $[x_1, x_2]$ contient un zéro de la fonction si

1. f est continue sur cet intervalle,

$$2. f(x_1) \times f(x_2) < 0.$$

Lorsque ces deux conditions sont réalisées, nous pouvons approximer la racine de cette fonction à l'aide d'un algorithme. L'algorithme de la méthode de bisection consiste à répéter la division d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction, pour approcher de plus en plus la racine de l'équation $f(x) = 0$, jusqu'à ce qu'une précision ϵ soit atteinte (Woodford et Phillips, 2011). La figure 1.1(a) illustre la méthode.



(a) Exemple qui illustre la démarche de la méthode de bisection. (b) Exemple représentant le cas où la méthode de bisection ne fonctionne pas.

Figure 1.1 Exemples sur la méthode de bisection.

L'algorithme de cette méthode est décrit comme suit

Algorithme 1 Méthode de bisection.

1. Trouver un intervalle $[x_1, x_2]$ dans lequel $f(x) = 0$,
 2. Poser $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,
 3. Tant que l'erreur relative $\frac{|x_2 - x_1|}{2|x_0|} > \varepsilon$, pour ε donné,
 4. $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,
 5. Si $f(x_0) \times f(x_1) > 0$,
 6. Alors x_0 devient x_1 ,
 7. Sinon x_0 devient x_2 ,
 8. Répétez l'étape 2.
-

Cette méthode converge linéairement, donc elle n'est pas très rapide. Elle est utilisée généralement pour avoir une bonne initialisation d'une méthode d'ordre de convergence supérieure. De plus, la méthode de bisection ne parviendra pas à trouver une racine si la fonction f ne traverse pas l'axe des x , c'est-à-dire si la fonction f ne présente pas de changement de signe (Fortin, 2011), comme le montre la figure 1.1(b).

1.1.2 La méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton cherche également à trouver une racine d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ de telle sorte que f vérifie les hypothèses suivantes

- a) f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$,
- b) $f(a) \times f(b) < 0$,
- c) f est dérivable sur $[a, b]$ et $f'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$.

Cette méthode se base sur l'utilisation du développement de Taylor à partir d'une valeur initiale x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

Lorsque nous négligeons tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, nous obtenons

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \simeq 0.$$

Géométriquement, la droite tangente à la courbe en x_0 est de pente $f'(x_0)$, et a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Cette droite coupe l'axe des abscisses en $y = 0$ ce qui implique que $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Il suffit ensuite de calculer l'intersection de la droite tangente en x_0 avec l'axe des abscisses. Nous obtenons alors un point x qui est en général plus proche du vrai zéro de f que le point x_0 précédent. Nous recommençons le processus et nous cherchons à corriger x . La procédure peut se résumer par l'algorithme que voici

Algorithme 2 Méthode de Newton-Raphson

1. Étant donné la valeur initiale x_0 ,
 2. Nous construisons par récurrence la suite $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$,
 3. Si $\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \epsilon$, pour ϵ donné, alors la convergence est atteinte et x_{k+1} est l'approximation de la racine recherchée.
-

Cette méthode converge de façon quadratique et est donc plus rapide que la méthode de bisection.

La convergence dépend de la valeur initiale x_0 . Une mauvaise valeur initiale peut provoquer la divergence, c'est-à-dire que si le point de départ x_0 est loin de la racine recherchée, la méthode de Newton-Raphson peut diverger. La figure 1.2 illustre la convergence et les pièges que la méthode de Newton peut rencontrer.

Lorsque la racine n'est pas simple, c'est-à-dire double ou plus, la méthode de Newton converge linéairement avec un taux de convergence $1 - \frac{1}{n}$ où n est le degré de la racine. Soit r une racine multiple de f , dans ce cas, la fonction f s'écrit sous

la forme suivante $f(x) = (x - r)^n h(x)$ avec $h(r) \neq 0$. Soit $g(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$, la convergence est linéaire si $|g'(r)| < 1$.

La dérivée première de g donne

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

avec

$$f'(x) = (x - r)^{n-1} [nh(x) + (x - r)h'(x)],$$

et

$$f''(x) = (x - r)^{n-2} [n(n-1)h(x) + 2n(x - r)h'(x) + (x - r)^2 h''(x)],$$

donc

$$g'(x) = \frac{h(x) [n(n-1)h(x) + 2n(x - r)h'(x) + (x - r)^2 h''(x)]}{[nh(x) + (x - r)h'(x)]^2}.$$

Nous avons $|g'(r)| = 1 - 1/n$. Nous remarquons que plus n est grand, plus la convergence est lente (Fortin, 2011).

Cependant, les racines multiples ne sont pas la seule difficulté que nous pouvons rencontrer pour cette méthode. La méthode de Newton-Raphson peut osciller autour d'un maximum ou un minimum local sans converger à une racine, (George B. Arfken, 2014). La figure 1.2(b) illustre comment la méthode de Newton converge vers un minimum local.

1.2 Intégrales numériques

Nous utilisons l'intégration numérique pour calculer les intégrales entre les racines d'une fonction.

1.2.1 Quadrature de Gauss

La quadrature de Gauss sera utilisée, dans ce mémoire, pour calculer l'intégrale entre les zéros d'une fonction f .

La quadrature de Gauss est une méthode d'approximation de la valeur numérique de l'intégrale d'une fonction f . Nous cherchons à écrire cette intégrale sous la forme d'une somme pondérée de la fonction intégrée f , évaluée à n points uniques dans un intervalle $[a, b]$

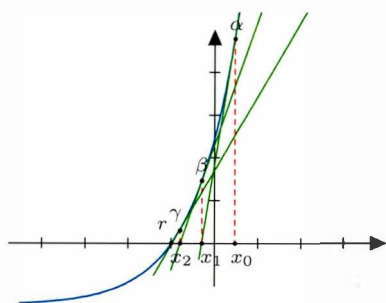
$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \quad (1.1)$$

Les x_i sont les points d'intégration et les coefficients w_i sont les poids d'intégration. nous voyons que nous avons $2n$ inconnues dans la formule (1.1), c'est-à-dire n poids w_i , et n nœuds x_i . Ces inconnues sont reliées entre elles par un système d'équations. La résolution de cet ensemble d'équations donne le résultat exact à l'intégrale de la fonction $f(x)$ si la puissance est de degré d'au plus $2n - 1$.

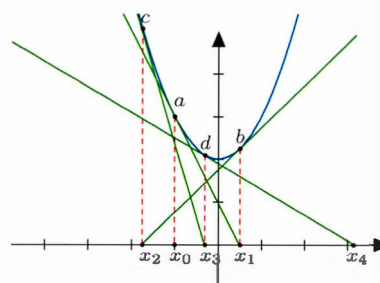
1.2.2 Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre, notés P_n , sont très efficaces et faciles à utiliser pour résoudre le système d'équations de la quadrature de Gauss. Ils peuvent s'écrire en utilisant la formule de Rodrigues (King, 2010) comme suit

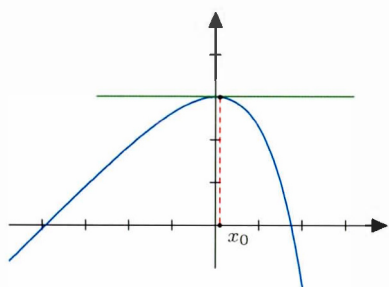
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \text{ avec } P_n(1) = 1.$$



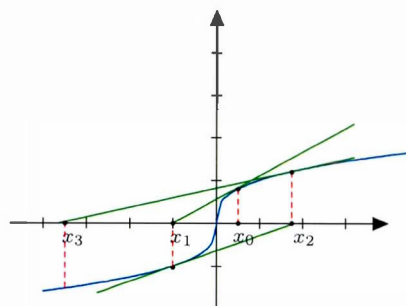
(a) Convergence quadratique de la méthode Newton-Raphson



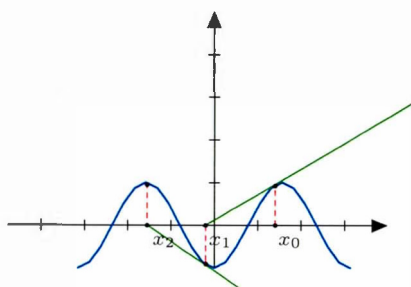
(b) Oscillations autour d'un maximum ou d'un minimum, qui empêche la convergence



(c) Rencontre d'une pente nulle qui empêche la convergence



(d) Divergence de la méthode : point d'inflexion au voisinage d'une racine



(e) Dans le cas d'une fonction qui possède plusieurs racines, nous ne pouvons pas être sûr que la racine trouvée est la racine que nous cherchons.

Figure 1.2 Exemples de la convergence et des pièges que la méthode de Newton-Raphson peut rencontrer.

Les racines du $n^{\text{ème}}$ degré du polynôme de Legendre définissent les n nœuds de la formule de quadrature de Gauss (1.1). Les points x_i sont les zéros du polynôme de Legendre $P_n(x)$ et sont choisis pour donner la plus grande précision possible. Les poids w_i sont ensuite choisis pour rendre la formule exacte si $f(x)$ est un polynôme de degré $2n-1$ ou moins, c'est-à-dire que l'intégrale sera calculée exactement pour tout polynôme d'ordre $2n-1$ ou moins par rapport à la fonction de poids, qui s'écrit comme suit

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2) [P'_n(x_i)]^2}.$$

Les tables de Gauss¹ sont définies sur l'intervalle $[-1, 1]$. Pour pouvoir utiliser ces tables avec les abscisses et leurs poids directement, sur un intervalle $[a, b]$ quelconque, nous transformons l'intervalle $[a, b]$ à l'intervalle $[-1, 1]$. Il suffit d'effectuer le changement de variable $x = \frac{(b-a)t + (a+b)}{2}$ et $dx = \frac{b-a}{2} dt$. Ce changement de variable permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + (a+b)}{2}\right) dt. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nous écrivons l'intégrale dans l'équation (1.2) sous la forme d'une somme comme suit

1. Les tables de Gauss-Legendre sont définies sur l'intervalle $[-1, 1]$, nous pouvons les trouver prêtes à être utilisées, comme les tables des lois de probabilités, ou nous pouvons les programmer soi-même. Voir le programme Fortran dans le livre (Davis et Rabinowitz, 2007, annexe 2), qui calcule les abscisses avec leurs poids.

$$\int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)x + (a+b)}{2}\right) dx = \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{(b-a)x_i + (a+b)}{2}\right) + \epsilon.$$

L'erreur ϵ associée à la quadrature de Gauss-Legendre est donnée par

$$\epsilon = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi) \quad \text{où} \quad \xi \in [-1, 1].$$

Nous trouvons les détails de la preuve dans [Rabinowitz \(2001\)](#).

1.3 Polynôme de Tchebychev et interpolation

Dans ce mémoire, nous utilisons les nœuds du polynôme Tchebychev et les différences divisées, dans l'interpolation polynomiale, afin d'obtenir la précision de la méthode de point-selle, qui sera discutée en détails plus loin dans le chapitre 3.

1.3.1 Polynôme de Tchebychev

L'interpolation de Tchebychev (1821-1894) impose une subdivision de l'intervalle à des points appelés les points d'interpolation, ou nœuds de Tchebychev ([Jedrzejewski, 2005](#)). Ces points d'interpolation, d'ordre n sur l'intervalle $[-1, 1]$, sont les racines ou les zéros du polynôme de Tchebychev, qui correspondent aux points

$$x_k = \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right], \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Sur un intervalle $[a, b]$ quelconque, les points de Tchebychev sont définis par un simple changement de variables comme suit

$$u_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right], \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.3)$$

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont des polynômes définis par la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } -1 \leq x \leq 1,$$

avec $T_0 = 1$ et $T_1 = x$. Ces polynômes peuvent s'écrire également sous la forme

$$T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}(x)], \text{ pour } -1 \leq x \leq 1.$$

La propriété intéressante de ces polynômes est celle de mini-max, c'est-à-dire que la plus petite erreur possible est maximale sur tout l'intervalle donné. Ainsi, le polynôme de Tchebychev converge vers la fonction interpolée en tous points de l'intervalle, ce que nous appelons la convergence uniforme². L'erreur commise dans cette interpolation vérifie

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

où $T_n(x)$ est le polynôme d'interpolation de Tchebychev de f aux points x_1, x_2, \dots, x_n et c est une constante dépendante de x . Nous trouvons les détails dans ([Jedrzejewski, 2005](#)).

1.3.2 Les différences divisées et interpolation

Les différences divisées sont utilisées pour générer successivement des polynômes. Dans ce mémoire, elles sont calculées à partir des nœuds de Tchebychev et de la valeur de la fonction à ces nœuds, soit le polynôme de Tchebychev de degré n qui a des intersections avec la fonction f aux points distincts x_0, x_1, \dots, x_n . Les

2. La convergence est uniforme lorsque la courbe polynomiale se confond avec la fonction approximée, avec une erreur uniforme, sur tout l'intervalle.

différences divisées de f par rapport à x_0, x_1, \dots, x_n sont utilisées pour exprimer $T_n(x)$ sous la forme suivante

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (1.4)$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont des constantes.

Pour déterminer la première valeur, a_0 , nous devons évaluer $T_n(x)$, sous la forme de l'équation précédente, en x_0 , ce qui donne le terme constant a_0 ,

$$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0).$$

La différence divisée d'ordre zéro de la fonction f par rapport à x_i , notée $f[x_i]$, est tout simplement la valeur de f à x_i , c'est-à-dire $f[x_i] = f(x_i)$. De même, lorsque $T_n(x)$ est évaluée à x_1 , les seuls termes non nuls dans l'évaluation de $T_n(x_1)$ sont les termes constants et linéaires, et la seconde différence divisée est définie par

$$T_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1),$$

alors

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

De façon générale, les différences divisées d'ordre $0, 1, \dots, n$ sont définies par les relations de récurrences suivantes

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \quad (1.6)$$

Le polynôme d'interpolation dans l'équation (1.4) peut s'écrire alors comme suit

$$\begin{aligned}
 T_n(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
 &\quad + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\
 &= f[x_0] + \sum_{j=1}^n (x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})f[x_0, \dots, x_j].
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Cette forme est appelée polynôme de Newton ([Burden et Faires, 2011](#)).

1.4 Fonctions génératrices et fonction caractéristique

1.4.1 Fonction génératrice de probabilité d'une variable aléatoire

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeur positive ou nulle. La fonction génératrice de probabilité de Y est donnée par

$$G_Y(t) = E(t^Y) = \sum_{k \geq 0} t^k P(Y = k), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Si Y est une variable continue et $f_Y(y)$ est sa fonction de densité, alors sa fonction génératrice de probabilité est donnée par

$$G_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^y f_Y(y) dy. \tag{1.8}$$

1.4.2 Fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire

La fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire Y est définie par

$$M_Y(t) = E(e^{tY}), \quad t \in \mathbb{R},$$

lorsque son espérance existe, et le moment d'ordre k de la variable aléatoire Y est donné par

$$\mu_k = M_Y^k(0),$$

où M_Y^k est la dérivée d'ordre k de M_Y . Si Y est une variable discrète, alors sa fonction génératrice des moments s'écrit comme

$$M_Y(t) = \sum_y e^{ty} P(Y = y).$$

Si Y est une variable continue et $f_Y(y)$ est sa fonction de densité, alors sa fonction génératrice des moments est donnée par

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_Y(y) dy. \quad (1.9)$$

1.4.3 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y est la fonction à valeurs complexes définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{aligned} \phi_Y(t) &= E(e^{itY}) \\ &= E[\cos(tY)] + i E[\sin(tY)]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Cette fonction ne dépend donc que de la loi de Y . Nous disons aussi que c'est la transformée de Fourier de cette loi. Si cette variable aléatoire possède une densité, f_Y , alors

$$\phi_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) e^{ity} dy. \quad (1.11)$$

Si Y est une variable discrète, alors sa fonction caractéristique s'écrit

$$\phi_Y(t) = \sum_y e^{ity} P(Y = y).$$

1.4.4 Fonction génératrice des cumulants d'une variable aléatoire

La fonction génératrice des cumulants d'une variable aléatoire Y est donnée par le logarithme de la fonction génératrice des moments de cette variable. Elle s'écrit

comme suit

$$K_Y(t) = \log [M_Y(t)] .$$

1.5 Famille exponentielle naturelle

La famille exponentielle naturelle (notée NEF) est un ensemble de lois dont l'écriture est résumée par une formule unique et possédant des propriétés communes. Considérons une variable aléatoire Z de densité $f_Z(z; \theta)$, où z est définie sur S , tel que $z \in S \subseteq \mathbb{R}$ et θ est le paramètre naturel défini sur Ω , tel que $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Une famille exponentielle naturelle est une famille de densité de probabilité qui se présente de la façon suivante ([Madsen et Thyregod, 2010](#)) et ([Jorgensen, 1997](#))

$$f_Z(z; \theta) = \exp \{ \theta z - \kappa(\theta) + c(z) \}, \quad \text{pour } \theta \in \Omega,$$

où $c(z, \phi)$ est une fonction qui dépend de z seulement et $\kappa(\theta)$ est appelée la constante de normalisation de la distribution. Cette représentation est appelée la paramétrisation canonique de la famille, dont le paramètre naturel θ est appelé le paramètre canonique.

L'intérêt de cette écriture est qu'un ensemble de résultats peut être obtenu de façon globale pour toutes les distributions qui appartiennent à cette famille. Les densités de probabilité de cette famille de distributions possèdent trois propriétés importantes

1. $\frac{d}{d\theta} \int_z f_Z(z; \theta) dz = 0$,
2. $E[Z] = \kappa'(\theta)$,
3. $Var(Z) = \kappa''(\theta)$,

avec $\kappa'(\theta)$ qui est la dérivée première de $\kappa(\theta)$ par rapport à θ et $\kappa''(\theta)$ est sa dérivée seconde. Cette famille comprend des densités discrètes telles que la distribution

Poisson, la distribution binomiale et des distributions continues telles que la loi exponentielle.

Exemple 1.5.1. Nous pouvons écrire la densité de la distribution Poisson sous la forme canonique de la famille exponentielle comme suit

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!} \\ &= \exp\{z \log(\lambda) - \lambda - \log(z!)\}, \quad z \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

où $\theta = \log(\lambda)$, $\kappa(\theta) = \lambda = \exp\{\theta\}$, et $c(z) = -\log(z!)$. Ainsi, $E[Z] = \kappa'(\theta) = \exp\{\theta\}$ et $Var[Z] = \kappa''(\theta) = \exp\{\theta\}$.

Exemple 1.5.2. La fonction de masse de la distribution binomiale s'écrit

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} \\ &= \exp \left\{ z \log \left[\frac{p}{1-p} \right] + n \log(1-p) + \log \binom{n}{z} \right\}, \quad z \in \{0, \dots, n\}, \end{aligned}$$

avec $\theta = \log \left[\frac{p}{1-p} \right]$, $\kappa(\theta) = n \log[1 + \exp(\theta)]$, et $c(z) = \log \binom{n}{z}$. Donc, $E[Z] = \kappa'(\theta) = \frac{ne^\theta}{1+e^\theta}$ et $Var[Z] = \kappa''(\theta) = \frac{ne^\theta}{(1+e^\theta)^2}$.

1.6 Famille de dispersion exponentielle

Une famille de dispersion exponentielle est un ensemble de famille exponentielle naturelle, indexée par le paramètre de dispersion ϕ , tel que $\phi > 0$. Cette famille partage les propriétés fondamentales de la famille exponentielle naturelle ([Lindsey, 2000](#)).

Les modèles de dispersion exponentielle (notés EDM) ont été largement abordés par [Jorgensen \(1997\)](#) qui a entrepris une étude détaillée sur leurs propriétés. Une famille de densités de probabilité est appelée une famille de dispersion exponen-

tielle si elle peut s'écrire sous la forme ([Droesbeke et al., 2005](#))

$$f_Z(z; \theta, \phi) = \exp \left\{ \frac{\theta z - \kappa(\theta)}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\}, \quad \text{pour } \theta \in \Omega, \quad (1.12)$$

où θ est le paramètre canonique et $\kappa(\theta)$ est appelée la fonction des cumulants d'un EDM. Les fonctions $a(\phi)$, $c(z, \phi)$ et $\kappa(\theta)$ sont spécifiques à chaque distribution. La famille des modèles de dispersion exponentielle comprend des distributions continues telles que la distribution Normale, Gamma, et Inverse Gaussienne, et les distributions discrètes telles que la distribution Poisson, binomiale et binomiale négative. Voir le tableau [1.2](#) pour plus d'information.

Nous pouvons trouver plusieurs expressions du modèle de dispersion exponentielle selon les ouvrages, par exemple, nous trouvons la forme suivante, ([Jorgensen, 1997](#))

$$f_Z(z; \theta, \phi) = c'(z, \phi) \exp \left\{ \frac{\theta z - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\}, \quad \text{pour } \theta \in \Omega, \quad (1.13)$$

où $c'(z, \phi) = \exp\{c(z, \phi)\}$ de l'équation [\(1.12\)](#), et $a(\phi)$ et $\kappa(\theta)$ sont similaires aux fonctions de l'équation [\(1.12\)](#).

Tableau 1.1 Les composantes de la famille de dispersion exponentielle pour quelques lois de probabilité usuelles,
 $f_Z(z; \theta, \phi) = \exp \left\{ \frac{\theta z - \kappa(\theta)}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\}.$

Distribution	Domaine	Paramètre canonique (θ)	$\kappa(\theta)$	$a(\phi)$	$c(z; \phi)$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$(-\infty, \infty)$	μ	$\frac{\theta^2}{2}$	σ^2	$-\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2) \right)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$\log(\lambda)$	$\exp(\theta)$	1	$-\log(z!)$
$\text{Gamma}(\alpha, \beta)$	$[0, \infty)$	$-\frac{1}{\alpha}$	$-\log(-\theta)$	$\frac{1}{\beta}$	$(\beta - 1)\log(z) + \beta \log(\beta) - \log[\Gamma(\beta)]$
$\text{IG}(\mu, \sigma^2)$	$(0, \infty)$	$-\frac{1}{2\mu^2}$	$-\sqrt{-2\theta}$	σ^2	$-\frac{1}{2z\phi} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi}{\phi}\right) - \frac{3}{2} \log(z)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$z \in \{0, \dots, n\}$	$\log \left[\frac{p}{1-p} \right]$	$n \log(1 + \exp\{\theta\})$	1	$\log \binom{n}{z}$

1.6.1 Fonction génératrice des moments, espérance et variance d'un EDM

Soit Z une variable aléatoire de distribution appartenant à la famille de dispersion exponentielle (Frees, 2009) alors

$$\begin{aligned}
 M_Z(t) &= E[e^{tz}] \\
 &= \int \exp \left\{ tz + \frac{z\theta - \kappa(\theta)}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\} dz \\
 &= \exp \left\{ \frac{\kappa(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\} \times \\
 &\quad \int \exp \left\{ \frac{z(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta + t[a(\phi)])}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\} dz \\
 &= \exp \left\{ \frac{\kappa(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\}, \tag{1.14}
 \end{aligned}$$

car, $\exp \left\{ \frac{z(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta + t[a(\phi)])}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\}$ est la densité de Z .

Ainsi

$$\int \exp \left\{ \frac{z(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta + t[a(\phi)])}{a(\phi)} + c(z, \phi) \right\} dz = 1.$$

À partir de la formule (1.14), nous pouvons calculer l'espérance de cette variable qui est donnée par

$$\begin{aligned}
 E[Z] &= M'_Z(0) \\
 &= \frac{d}{dt} \exp \left\{ \frac{\kappa(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\} \Big|_{t=0} \\
 &= \kappa'(\theta) = \frac{d\kappa(\theta)}{d\theta},
 \end{aligned}$$

et sa variance s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} M_Z''(t) &= \frac{d}{dt} \left[\kappa'(\theta + ta(\phi)) \exp \left\{ \frac{\kappa(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\} \right] \\ &= a(\phi) \kappa''(\theta + ta(\phi)) \exp \left\{ \frac{\kappa(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\} + \\ &\quad [\kappa'(\theta + ta(\phi))]^2 \exp \left\{ \frac{\kappa(\theta + t[a(\phi)]) - \kappa(\theta)}{a(\phi)} \right\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $E[Z]^2 = M_Z''(0) = a(\phi) \kappa''(\theta) + [\kappa'(\theta)]^2$, donc la variance de Z est

$$Var[Z] = \frac{d^2 \kappa(\theta)}{d\theta^2} a(\phi) = \kappa''(\theta) a(\phi). \quad (1.15)$$

Nous remarquons que la variance de Z est le produit de deux termes distincts. L'un d'eux est une fonction de θ , alors que l'autre est une fonction qui dépend de ϕ seulement.

Tableau 1.2 Espérance et variance de quelques distributions usuelles appartenant à la famille de dispersion exponentielle en fonction du paramètre canonique θ .

Distribution	Domaine	$E(Z) = \kappa'(\theta)$	$Var(Z) = \kappa''(\theta) a(\phi)$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$(-\infty, \infty)$	θ	$\sigma^2 = \phi$
$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	e^θ	e^θ
$Gamma(\mu, \lambda)$	$[0, \infty)$	$-\frac{1}{\theta}$	$\frac{\phi}{\theta^2}$
$\mathcal{IG}(\mu, \lambda)$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{-2\theta}}$	$\phi(-2\theta)^{-2/3}$
$\mathcal{B}(n, \mu)$	$z \in \{0, \dots, n\}$	$\frac{ne^\theta}{1 + e^\theta}$	$\frac{ne^\theta}{(1 + e^\theta)^2}$
$\mathcal{BN}(p, \lambda)$	$z \in \{0, \dots, n\}$	$\frac{\lambda e^\theta}{1 - e^\theta}$	$\frac{\lambda e^\theta}{(1 - e^\theta)^2}$

1.6.2 Fonction de variance

Tous les EDM sont caractérisés par leur fonction de variance $V(\cdot)$ qui décrit la relation moyenne-variance de la distribution lorsque la dispersion est maintenue constante. Soit $V(\mu)$ la variance en fonction de la valeur moyenne pour une famille de distributions. La fonction $\kappa(\theta)$, vue dans les formules (1.12) et (1.13), est très importante, car ses dérivées donnent la moyenne et la fonction de variance.

Soit la fonction $\tau(\theta) = \mu = \kappa'(\theta)$. De l'équation (1.15), nous constatons que la variance d'une variable aléatoire de famille de dispersion exponentielle est $Var[Z] = \kappa''(\theta)a(\phi)$. Puisque la fonction de variance est égale à $\kappa''(\theta)$, et en utilisant $\theta = \tau^{-1}(\mu)$, nous trouvons

$$V[\mu] = \kappa''[\tau^{-1}(\mu)].$$

Si Z suit une distribution EDM avec moyenne μ , fonction de variance $V(\cdot)$ et dispersion ϕ , alors la variance de Z peut s'écrire $Var(Z) = \phi V(\mu)$.

1.6.3 Déviance unitaire

Le principe de la déviance unitaire est de mesurer l'écart entre la moyenne μ et les valeurs observées z , soit $z \in S$, où S est le domaine de définition de z et $\mu \in \Omega$ tels que $\Omega \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$.

Une fonction $d : S \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une déviance unitaire si elle satisfait les deux conditions suivantes

1. $d(\mu, z) > 0$, pour $z \neq \mu$,
2. $d(z, z) = 0$, pour tout $z \in \Omega$.

La déviance unitaire pour un modèle de dispersion exponentielle est définie par

$$d(z; \mu) = 2 \sup t(z; \mu) - 2t(z; \mu), \quad \text{pour } \mu \in \Omega \text{ et } z \in S, \quad (1.16)$$

Tableau 1.3 Fonction de la variance et déviance unitaire pour quelques distributions appartenant à la famille de dispersion exponentielle.

Distribution	Domaine	Déviance unitaire $d(z, \mu)$	$V(\mu)$
$\mathcal{N}(\mu, 1)$	$(-\infty, \infty)$	$(z - \mu)^2$	1
$\mathcal{P}(\lambda)$	\mathbb{N}	$2z \log(z/\mu) - (z - \mu)$	μ
$\text{Gamma}(\mu, \beta)$	$[0, \infty)$	$2 - \log(z/\mu) + (z - \mu)/\mu$	μ^2
$\text{IG}(\mu, \sigma^2)$	$(0, \infty)$	$\frac{(z - \mu)^2}{z\mu^2}$	μ^3
$\mathcal{B}(n, \mu)$	$z \in \{0, \dots, n\}$	$2 \left[z \log \left(\frac{z}{\mu} \right) + (1 - z) \log \left(\frac{1-z}{1-\mu} \right) \right]$	$\mu(1 - \mu)$
$\mathcal{BN}(n, \mu)$	$z \in \{0, \dots, n\}$	$2 \left[z \log \left(\frac{z}{\mu} \right) + (1 - z) \log \left(\frac{1-z}{1-\mu} \right) \right]$	$\mu(1 + \mu)$

où $t(z, \mu) = z\theta - \kappa(\theta)$. Par exemple, dans le cas d'une distribution normale avec une variance constante, c'est-à-dire la fonction de variance $V(\mu) = 1$, la déviance unitaire est simplement $d(z, \mu) = (z - \mu)^2$. Le tableau 1.3 présente la fonction de variance et la déviance unitaire pour plusieurs distributions de la famille de dispersion exponentielle.

CHAPITRE II

DISTRIBUTION POISSON COMPOSÉE ET DISTRIBUTION TWEEDIE

Dans ce chapitre, nous étudierons la distribution Tweedie. Cette distribution représente un cas particulier de la distribution de Poisson composée, appelée la distribution Poisson-Gamma. La distribution Poisson-Gamma peut s'écrire sous la forme du modèle de dispersion exponentielle, nous pouvons donc utiliser les propriétés de ce modèle et obtenir une nouvelle paramétrisation de la distribution Tweedie.

2.1 Distribution de Poisson composée

Cette section est fortement inspirée du livre ([Parzen, 1999](#)). Nous utiliserons les résultats de cette section dans l'approximation de la densité Tweedie par la méthode de développement en séries infinies dont nous discuterons plus loin au chapitre 3.

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson composée telle que

$$Z = \sum_{k=1}^N Y_k, \quad (2.1)$$

où $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et où N est de loi de Poisson de paramètre λ . Notons que N est indépendante des Y_k . Par convention, $Z = 0$ si $N = 0$.

Les distributions de Poisson composée sont très utiles en actuariat. Généralement,

N représente le nombre de sinistres ou de réclamations et les variables aléatoires positives Y_k , $k = 1, \dots, N$, correspondent aux montants des N sinistres. Par construction du modèle, nous supposons que le nombre de sinistres n'a pas d'influence sur les montants des sinistres. De plus, les montants de chaque sinistre ont le même comportement aléatoire. En fait, le montant du premier sinistre n'a pas d'incidence sur le montant du deuxième sinistre et ainsi de suite.

2.1.1 Fonction de répartition et densité de distribution de Poisson composée

La fonction de répartition de la distribution de Poisson composée s'écrit en conditionnant sur N comme suit

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) P(Z \leq z \mid N = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} P(N = k) F_Y^{(k)}(z) \text{ (car } N \text{ et } Y \text{ sont indépendantes), pour } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

où $F_Y^{(k)}(z)$ représente la $k^{\text{ième}}$ convolution de la fonction de répartition $F_Y(z)$ de Y (Melnick et Everitt, 2008). En effet,

$$F_Y^{(k)}(z) = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k \leq z) = F_{Y_1 + \dots + Y_k}(z), \text{ pour } k \geq 1.$$

Donc la fonction de répartition de la somme aléatoire Z est donnée par

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} F_Y^{(k)}(z).$$

De même, sa fonction de densité est donnée par

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_Y^{(k)}(z) P(N = k), \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} f_Y^{(k)}(z). \end{aligned}$$

où $f_Y^{(k)}(z)$ représente la $k^{\text{ième}}$ convolution de la fonction de densité $f_Y(z)$ de Y , pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Pour $k = 0$, nous avons

$$P(Z = 0) = P\left(\sum_{k=1}^N Y_k = 0\right) = P(N = 0) = e^{-\lambda},$$

car les Y_k sont tous strictement positifs. Ainsi, le seul moyen que leur somme soit nulle est que celle-ci ne comporte aucun terme.

2.1.2 Fonction génératrice de probabilité d'une distribution de Poisson composée

À partir de la fonction génératrice de probabilité de la formule (1.8), la fonction génératrice de Z est obtenue en conditionnant sur la variable N de la manière suivante

$$G_Z(t) = E(t^Z) = E\left[E\left(t^{\sum_{i=1}^k Y_i} \mid N = k\right)\right], \quad \forall i = 1, 2, \dots, k,$$

pour t réel tel que $E[t^{Y_i}]$ existe. Puisque les variables Y_i sont indépendantes, il s'avère que

$$G_Z(t) = E\left[\prod_{i=1}^k E(t^{Y_i} \mid N = k)\right].$$

Comme les Y_i sont identiquement distribuées et indépendantes de N , il en résulte

$$G_Z(t) = E\left[(G_Y(t))^N\right].$$

2.1.3 Fonction génératrice des moments d'une distribution de Poisson composée

Nous obtenons la fonction génératrice des moments de Z en procédant de façon similaire à ce que nous avons fait avec la fonction génératrice de probabilité. En

utilisant la formule de la fonction génératrice des moments de l'équation (1.9), nous avons

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\
&= E[E(e^{tZ} \mid N = n)] \\
&= E\left[\prod_{i=1}^n E(e^{tY_i} \mid N = n)\right] \text{ (par indépendance des } Y_i) \\
&= E([M_Y(t)]^N) \text{ (par indépendance des } Y_i \text{ avec } N) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [M_Y(t)]^n P[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(M_Y(t)]^n e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^n}{n!} \text{ (car } N \sim \mathcal{P}(\lambda)) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(M_Y(t)\lambda)]^n}{n!} \tag{2.2} \\
&= e^{-\lambda} e^{M_Y(t)\lambda} \text{ (car } e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{C}) \\
&= e^{\lambda[M_Y(t)-1]}. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

2.1.4 La fonction génératrice des cumulants d'une distribution de Poisson composée.

La fonction génératrice des cumulants d'une distribution de Poisson composée est donnée par le logarithme de la fonction génératrice des moments. Elle s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}
K_Z(t) &= \log [M_Z(t)] \\
&= \log [e^{\lambda[M_Y(t)-1]}] \\
&= \lambda [M_Y(t) - 1]. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

2.1.5 Fonction caractéristique d'une distribution de Poisson composée

À partir de la formule de la fonction caractéristique de l'équation (1.11), nous pouvons calculer que la fonction caractéristique de la distribution de Poisson composée Z , en conditionnant sur N , s'exprime comme suit

$$\begin{aligned}
 \phi_Z(t) &= E(e^{itZ}) \\
 &= E[E(e^{itZ} \mid N = n)] \\
 &= E\left[\prod_{i=1}^n E(e^{itY_i} \mid N = n)\right] \text{ (par indépendance des } Y_i) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [\phi_Y(t)]^n P[N = n] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} [(\phi_Y(t))^n e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^n}{n!}] \text{ (car } N \sim \mathcal{P}(\lambda)) \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(\phi_Y(t)\lambda)^n]}{n!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{\phi_Y(t)\lambda} \text{ (car } e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{C}) \\
 &= e^{\lambda[\phi_Y(t)-1]}.
 \end{aligned}$$

où ϕ_Y est la fonction caractéristique des variables Y_k , alors que λ est l'intensité de N .

2.1.6 Espérance et variance d'une distribution de Poisson composée

Nous identifions l'expression de l'espérance de Z en conditionnant sur N et en utilisant la formule de l'espérance totale (Boland, 2007)

$$E(Z) = E[E(Z \mid N)].$$

Ainsi, l'expression de $E(Z)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E \left[\sum_{i=1}^N Y_i \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^k Y_i \mid N = k \right) \right] \\
&= E(Y)E(N) \text{ (par indépendance des } Y_i \text{ avec } N) \\
&= \lambda E(Y) \text{ (car } E(N) = \lambda).
\end{aligned}$$

En actuariat, l'espérance des coûts pour un risque, $E(Z)$, correspond au produit du nombre espéré de sinistres $E(N)$ et du montant espéré d'un sinistre $E(Y)$ ou, en d'autres termes, la fréquence multipliée par la sévérité. Dans le contexte de l'assurance, l'espérance de la somme Z correspond à ce qui s'appelle la prime pure.

De même, pour l'expression de la variance de Z , nous conditionnons à nouveau sur la variable aléatoire N , tout en utilisant la formule de la variance totale

$$\begin{aligned}
Var(Z) &= Var[E(Z \mid N)] + E[Var(Z \mid N)] \\
&= Var \left[E \left(\sum_{i=1}^n Y_i \mid N = n \right) \right] + E \left[Var \left(\sum_{i=1}^n Y_i \mid N = n \right) \right] \\
&= Var[NE(Y)] + E[NVar(Y)] \\
&= [E(Y)]^2 Var(N) + E(N)Var(Y) \\
&= \lambda[E(Y)]^2 + \lambda Var(Y) \text{ (car } E(N) = \lambda \text{ et } Var(N) = \lambda) \\
&= \lambda (Var(Y) + [E(Y)]^2) \\
&= \lambda [E(Y^2)] \text{ (car } Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2).
\end{aligned}$$

2.1.7 Distribution Poisson-Gamma

Lorsque les variables aléatoires Y_k , $k = 1, \dots, n$, dans l'équation (2.1) sont distribuées selon une loi $Gamma(-\alpha, \gamma)$, le modèle s'appelle Poisson-Gamma. Nous

posons α négatif, afin de simplifier la paramétrisation dans les formules. La distribution Poisson-Gamma est donc un cas particulier d'une distribution de Poisson composée. Elle est courante dans le domaine de l'assurance.

Soit la densité de Y_k

$$f_{Y_k}(y) = \frac{1}{\gamma^{(-\alpha)}\Gamma(-\alpha)} (y)^{-\alpha-1} \exp(-y/\gamma), \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}_+,$$

où $-\alpha < 0$ et $\gamma = -m/\alpha$ sont les paramètres de forme et d'échelle respectivement. De façon générale, la fonction de densité de la somme des variables aléatoires indépendantes Y_k , pour $k = 1, 2, \dots, n$, s'écrit

$$f_Y(y) = \frac{(-\alpha/m)^{-\alpha n}}{\Gamma(-\alpha n)} y^{(-\alpha n-1)} \exp\{-y(-\alpha/m)\}, \quad (2.5)$$

où $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

Nous savons que si dy est un nombre réel positif infiniment petit, alors la probabilité que Y soit inclus dans l'intervalle $[y, y + dy]$ est égale à $f(y) dy$, donc

$$P(y < Y < y + dy) = f(y) dy.$$

Alors la distribution conjointe de N et Y est donnée, en conditionnant sur N , par la formule suivante, (Wüthrich et Merz, 2008 ; Gareth W. Peters, 2015), pour tout $\phi > 0$, $n > 0$ et $y > 0$.

$$\begin{aligned} f_{N,Y}(n, y, \lambda, m, \alpha) dy &= P(y < Y < y + dy \mid N = n) P(N = n) \\ &= \frac{(-\alpha/m)^{-\alpha n}}{\Gamma(-\alpha n)} y^{(-\alpha n-1)} \exp\left\{-\frac{-\alpha}{m} y\right\} \frac{(\lambda)^n}{n!} \exp\{-\lambda\} dy, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Cette distribution appartient à la famille de dispersion exponentielle, vue au chapitre 1. Nous faisons des transformations sur la formule (2.6) afin de l'écrire sous

forme de densité de la famille de dispersion exponentielle de l'équation (1.13),
donc l'équation (2.6) devient

$$f_{N,Y}(n, y, \lambda, m, \alpha) dy = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha n) y} \left[\lambda \left(\frac{-\alpha}{m} \right)^{-\alpha} (y^{-\alpha}) \right]^n \exp \left\{ \frac{1}{\phi} \left(-\frac{\phi(-\alpha)}{m} y - \phi \lambda \right) \right\} dy.$$

où ϕ est un paramètre de dispersion. Nous reparamétrisons comme suit

$$p = \frac{2 - \alpha}{1 - \alpha} \in (1, 2)$$

$$\mu = \lambda m$$

$$\phi = \frac{\lambda^{1-p} m^{2-p}}{2 - p}.$$

Par conséquent, $\alpha = \frac{2 - p}{1 - p}$ et

$$f_{N,Y}(n, y, \phi, \alpha) dy = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha n) y} \left[\frac{y^{-\alpha} (1/\phi)^{-\alpha+1}}{(p-1)^{-\alpha} (2-p)} \right]^n \exp \left\{ \frac{1}{\phi} \left(y \frac{\mu^{1-p}}{1-p} - \frac{\mu^{2-p}}{2-p} \right) \right\} dy.$$

Donc, la densité de Z pour $z > 0$ est donnée par

$$f_Z(z, \lambda, m, \alpha) = \sum_{n \geq 1} f_{N,Y}(n, z, \lambda, m, \alpha) \quad (2.7)$$

$$= a(z, \phi) \exp \left\{ \frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p}}{1-p} - \frac{\mu^{2-p}}{2-p} \right) \right\}, \quad (2.8)$$

avec

$$a(z, \phi) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha n) z} \left[\frac{z^{-\alpha} (1/\phi)^{-\alpha+1}}{(p-1)^{-\alpha} (2-p)} \right]^n.$$

Nous notons que la fonction $a(z, \phi, p)$, dans la formule précédente, n'a pas une forme fermée.

L'équation (2.8) devient alors

$$f_Z(z, \mu, \phi) = a(z, \phi) \exp \left\{ \frac{1}{\phi} [z\theta - \kappa(\theta)] \right\}, \quad (2.9)$$

avec $\theta = \frac{\mu^{1-p}}{1-p}$ et $\kappa(\theta) = \frac{\mu^{2-p}}{2-p}$.

D'autre part, à partir de la fonction génératrice des moments d'une distribution de Poisson composée, dans l'équation (2.3), et la fonction génératrice des moments de la distribution Gamma, donnée dans l'équation (2.12), nous constatons que la fonction génératrice des moments de la distribution Poisson-Gamma est donnée par

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= e^{\lambda\{M_Y(t)-1\}} \\ &= e^{\lambda\{[(1-\gamma t)^{(-\alpha)}]^{-1}-1\}} \\ &= e^{\lambda\{(1-\gamma t)^\alpha-1\}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

où λ est la moyenne de la variable N , et les paramètres $-\alpha$ et γ sont respectivement les paramètres de forme et d'échelle d'une distribution Gamma tel que mentionné plus tôt. De même, à partir de la formule (2.4), et la fonction génératrice des moments de la distribution Gamma, donnée dans l'équation (2.12), la fonction génératrice des cumulants de la distribution Poisson-Gamma s'exprime comme suit

$$\begin{aligned} K_Z(t) &= \lambda [M_Y(t) - 1] \\ &= \lambda [(1 - \gamma t)^\alpha - 1], \end{aligned} \tag{2.11}$$

pour $\alpha < 0$.

2.2 Distribution Tweedie

Les modèles Tweedie ont été élaborés par Tweedie (1984). Ils appartiennent à la famille des modèles de dispersion exponentielle. Ils ont alors les propriétés d'un EDM, avec une fonction de variance $V(\mu) = \phi\mu^p$, où $\phi > 0$ représente le paramètre de dispersion et μ représente la moyenne, avec $\mu > 0$.

La distribution de Poisson est un cas spécial de la distribution Tweedie, avec une fonction de variance linéaire, et $p = 1$. La distribution Gamma s'avère aussi un cas spécial de la distribution Tweedie avec une fonction de variance quadratique, pour $p = 2$ (voir le tableau 1.3). La distribution Tweedie avec $1 < p < 2$, comble l'écart entre le modèle de Poisson et le modèle Gamma par rapport à la fonction de variance. Cette distribution est continue pour $Z > 0$ avec une masse discrète à $Z = 0$.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons d'ailleurs à la distribution Tweedie avec $1 < p < 2$, appelée Poisson composée par Bar-Lev et Stramer (1987), Feller (1968), Jørgensen et Paes De Souza (1994), Smyth et Jørgensen (2002) et Poisson-Gamma par Smyth (1996).

2.2.1 Exemples de lois appartenant à la famille Tweedie

Exemple 2.2.1. Une variable aléatoire discrète Z , suit une loi de Poisson de paramètre λ notée $P(\lambda)$, si sa fonction de masse est de la forme

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}, \quad \text{pour } \lambda > 0 \quad \text{et} \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

La distribution Poisson appartient à la famille Tweedie, avec $p = 1$. La fonction caractéristique de $P(\lambda)$ est donnée par

$$\phi(t) = \exp(\lambda e^{it} - 1).$$

La moyenne et la variance de cette distribution sont

$$E[Z] = \mu = \lambda; \quad Var[Z] = \lambda.$$

Exemple 2.2.2. La distribution Gamma appartient à la famille Tweedie, avec $p = 2$. Nous disons que la variable aléatoire continue Z suit une loi Gamma avec les paramètres α et γ , notée $Gamma(\alpha, \gamma)$, si sa fonction de densité est donnée

par

$$f_Z(z) = \frac{1}{\gamma \Gamma(\alpha)} \left(\frac{z}{\gamma} \right)^{\alpha-1} \exp(-z/\gamma), \quad \text{pour } z \in \mathbb{R}_+,$$

où α et γ sont les paramètres de forme et d'échelle respectivement. La fonction génératrice des moments de la distribution Gamma est donnée par

$$M_Z(t) = \frac{1}{(1 - t\gamma)^\alpha}. \quad (2.12)$$

La moyenne et la variance de cette distribution sont

$$E[Z] = \mu = \alpha\gamma; \quad \text{Var}[Z] = \alpha\gamma^2.$$

La distribution $\text{Gamma}(\nu/2, 2)$ coïncide avec la distribution χ^2 à ν degrés de liberté (Madsen et Thyregod, 2010).

Exemple 2.2.3. La distribution normale appartient à la famille Tweedie ayant une fonction de variance $V(\mu) = \sigma^2$ avec $p = 0$.

Une variable aléatoire réelle Z , prenant ses valeurs dans \mathbb{R} , suit une loi de Laplace-Gauss ou loi normale, de paramètres μ et σ^2 , si sa densité de probabilité est donnée par

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\},$$

avec $f(z) > 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$. L'espérance d'une variable aléatoire continue suivant une loi normale $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est

$$E(Z) = \mu,$$

alors que sa variance est donnée par

$$\text{Var}(Z) = \sigma^2.$$

Exemple 2.2.4. La distribution inverse gaussienne appartient à la famille Tweedie, avec $p = 3$. Cette loi est appelée également distribution de Wald et notée $IG(\mu, \lambda)$.

Soit Z une variable aléatoire continue telle que $z \in]0, \infty[$. Sa densité de probabilité est donnée par

$$f(z; \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi z^3} \right)^{1/2} \exp \frac{-\lambda(z - \mu)^2}{2\mu^2 z}, \text{ pour } z \in \mathbb{R}_+,$$

où $\mu > 0$ est son espérance et $\lambda > 0$ est un paramètre de forme. La fonction génératrice des cumulants de la loi inverse-gaussienne est l'inverse de celle de la loi normale.

2.2.2 Densité et fonctions génératrices de la distribution Tweedie

Comme la distribution Tweedie appartient aux EDM, avec une fonction de variance de la forme $\phi\mu^p$, alors sa densité peut s'exprimer comme dans l'équation (1.13) qui est équivalente à la formule (2.9) avec $1 < p < 2$. La fonction de densité de la distribution Tweedie s'écrit alors sous la forme du modèle de dispersion exponentielle comme suit

$$\begin{aligned} f_Z(z, \mu, \phi) &= a(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} (z\theta - \kappa(\theta)) \right] \\ &= a(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p}}{1-p} - \frac{\mu^{2-p}}{2-p} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec

$$\theta = \begin{cases} \frac{\mu^{1-p}}{1-p} & p \neq 1 \\ \log \mu & p = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\kappa(\theta) = \begin{cases} \frac{\mu^{2-p}}{2-p} & p \neq 2 \\ \log \mu & p = 2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Le paramètre canonique θ appartient à un intervalle ouvert tel que $\kappa(\theta) < \infty$ et $\phi > 0$. Nous pouvons également écrire la fonction de densité Tweedie en termes de déviance comme suit

$$f_Z(z, \mu, \phi) = b(z, \phi) \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\}, \quad (2.16)$$

où $b(z, \phi) = f(z; z, \phi)$ et $d(z, \mu)$ est la déviance unitaire de la distribution Tweedie (Jorgensen, 1997)

$$d(z, \mu) = \frac{[\max(0, z)]^{(2-p)}}{(1-p)(2-p)} - z \frac{\mu^{(1-p)}}{(1-p)} + \frac{\mu^{(2-p)}}{2-p}. \quad (2.17)$$

Les fonctions a et b ne peuvent pas s'écrire sous forme fermée. C'est pour cette raison que nous utilisons des méthodes d'approximation pour estimer la densité de la distribution Tweedie. Cependant, la distribution Tweedie a une fonction génératrice des moments simple, de sorte que la densité peut être évaluée numériquement par inversion de Fourier de la fonction caractéristique, dont nous discuterons plus loin dans le chapitre 3.

À partir de l'équation (1.14), la fonction génératrice des moments de la distribution Tweedie s'écrit

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int \exp \left\{ \frac{1}{\phi} [z(\theta + t\phi) - \kappa(\theta)] + c(z, \phi, p) \right\} dz \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{\phi} [\kappa(\theta + t\phi) - \kappa(\theta)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

et sa fonction génératrice des cumulants s'écrit

$$K_Z(t) = \log [M_Z(t)] = \frac{1}{\phi} [\kappa(\theta + t\phi) - \kappa(\theta)]. \quad (2.19)$$

Des cas particuliers des distributions Tweedie comprennent la distribution normale ($p = 0$; avec $\phi = \sigma^2$ si la distribution est standard), la distribution Poisson ($p = 1$),

la distribution Gamma ($p = 2$), et la distribution gaussienne-inverse ($p = 3$). Ces distributions peuvent être écrites sous forme fermée. En dehors de ces cas particuliers, les distributions Tweedie ne disposent pas de fonction de densité qui peut s'écrire sous forme fermée.

Afin de simplifier les calculs dans l'approximation de la densité Tweedie par les méthodes discutées au chapitre 3, [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont choisi $\kappa(\theta) = 0$ et $\mu = 1$ à $\theta = 0$, sans perte de généralité, ce qui donne

$$\theta = \begin{cases} \frac{\mu^{1-p} - 1}{1 - p} & p \neq 1 \\ \log \mu & p = 1. \end{cases}$$

avec inverse

$$\mu = [\theta(1 - p) + 1]^{1/(1-p)}, \text{ pour } p \neq 1 \quad (2.20)$$

et

$$\kappa(\theta) = \begin{cases} \frac{\mu^{2-p} - 1}{2 - p} & p \neq 2 \\ \log \mu & p = 2. \end{cases} \quad (2.21)$$

Dans la formule (2.14), θ n'est pas continue en $p = 1$ et $\kappa(\theta)$, dans l'équation (2.15), n'est pas continue en $p = 2$. Nous avons $\theta \rightarrow \log \mu$ lorsque $p \rightarrow 1$ et $\kappa(\theta) \rightarrow \log \mu$ lorsque $p \rightarrow 2$. Ces nouvelles formes de θ et $\kappa(\theta)$ sont donc continues en p aussi bien qu'en θ . Dans ce cas, la densité s'écrit sous la forme suivante

$$f_Z(z, \mu, \phi) = a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p} - 1}{1 - p} - \frac{\mu^{2-p} - 1}{2 - p} \right) \right], \quad (2.22)$$

Cette forme est utilisée dans l'approximation de la densité Tweedie par l'approche d'inversion de Fourier, méthodes 1 et 2, discutée dans le chapitre 3, afin de simplifier les calculs.

Notons que la fonction $a'(z, \phi)$, dans l'équation précédente, est différente de la fonction $a(z, \phi)$ donnée par l'équation (2.13), puisque

$$\begin{aligned} f_Z(z, \mu, \phi) &= a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p} - 1}{1-p} - \frac{\mu^{2-p} - 1}{2-p} \right) \right] \\ &= a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p}}{1-p} - z \frac{1}{1-p} - \frac{\mu^{2-p}}{2-p} + \frac{1}{2-p} \right) \right] \\ &= a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(-\frac{z}{1-p} + \frac{1}{2-p} \right) \right] \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p}}{1-p} - \frac{\mu^{2-p}}{2-p} \right) \right], \end{aligned}$$

où $a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(-\frac{z}{1-p} + \frac{1}{2-p} \right) \right]$ représente la fonction $a(z, \phi)$ de l'équation (2.13).

2.2.3 Invariance au changement d'échelle

Parmi les propriétés importantes de la distribution Tweedie, nous avons la propriété d'invariance au changement d'échelle¹, comme le montre le théorème suivant

Théorème 2.2.1. (*Jorgensen, 1997, Théorème 4.1*)

Soit un modèle de dispersion exponentielle $EDM(\mu, \phi)$ tel que $1 \in \Omega$ et $V(1) = 1$. S'il existe une fonction g pour laquelle, nous avons

$$cEDM(\mu, \phi) = EDM\{c\mu, g(c, \phi)\}, \quad \forall c > 0. \quad (2.23)$$

alors

. Le modèle de dispersion exponentielle $EDM(\mu, \phi)$ est un modèle Tweedie pour tout $p \in \mathbb{R}$;

1. Soit c une constante positive, $c > 0$ et Y une variable aléatoire d'une certaine famille de distributions; Nous disons que cette famille est invariante à l'échelle si cY suit une distribution dans la même famille.

- . $g(c, \phi) = c^{2-p}\phi$;
- . Le domaine de la moyenne est $\Omega = \mathbb{R}$ pour $p = 0$ et $\Omega = \mathbb{R}_+$ pour $p \neq 0$;
- . Le modèle est infiniment divisible.

Considérons la transformation $Z = cY$ pour $c > 0$ où Y suit une distribution Tweedie de densité $f_Y(z; \mu, \phi)$ avec une moyenne μ et fonction de variance $V(\mu) = \mu^p$. À partir du résultat $g(c, \phi) = c^{2-p}\phi$ du théorème 2.2.1, nous pouvons constater que Z suit une distribution de Tweedie avec le même paramètre de distribution p , de moyenne $c\mu$ et dispersion $c^{2-p}\phi$. Plus exactement, nous avons

$$f_Z(z, \mu, \phi) = cf_Y(cz, c\mu, c^{2-p}\phi), \quad \text{pour tout } z > 0 \text{ et } c > 0. \quad (2.24)$$

2.2.4 Loi Khi-deux non centrale à zéro degré de liberté

Lorsque $p = 1.5$, la distribution Tweedie coïncide avec la distribution Khi-deux non centrale à zéro degré de liberté notée $\chi_0^2(\mu)$, abordée par (Siegel, 1979 ; Siegel, 1985). Cependant, la distribution Tweedie est définie pour $Z \geq 0$, alors que la distribution Khi-deux non centrale à zéro degré de liberté est définie seulement pour les valeurs de Z strictement positives, $z > 0$ (Jorgensen, 1987). Donc la distribution Khi-deux peut s'appliquer seulement sur la partie continue de la densité Tweedie, c'est-à-dire lorsque les valeurs de Z sont strictement supérieures à zéro. Dans ce cas, la distribution Khi-deux non centrale à zéro degré de liberté ne peut pas être utiliser pour les valeurs de Z qui sont nulles, $z = 0$.

Cependant, nous pouvons utiliser la distribution Khi-deux non centrale à zéro degré de liberté $\chi_0^2(\mu)$, pour calculer la précision des méthodes d'approximation de la distribution Tweedie étudiées en calculant l'erreur relative, et constater si les méthodes d'approximation de la densité Tweedie donnent de bons résultats.

Les distributions $\chi_0^2(\mu)$ sont des distributions Tweedie avec $p = 1, 5$ et $\phi = 4/\sqrt{\mu}$ qui peuvent être exprimées en termes de la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 1, que nous verrons plus loin.

Cette densité peut être considérée alors comme densité de Tweedie exacte. Ainsi, nous pouvons calculer la précision des méthodes d'approximation de Tweedie étudiées dans ce mémoire. La fonction de densité de $\chi_0^2(\mu)$ s'écrit comme suit

$$f_Z(z) = \frac{1}{z} \exp \left\{ -\frac{(\mu + z)}{2} \right\} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z\mu}{4}\right)^k}{k!(k-1)!}, \quad \text{pour } z > 0.$$

Elle peut également s'écrire en termes de la fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre 1

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{z}} \exp \left\{ -\frac{(\mu + z)}{2} \right\} I_1(\sqrt{z\mu}), \quad \text{pour } z > 0,$$

où $I_1(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce, d'ordre 1 ([Abramowitz et al., 1966](#)), dont la représentation est la suivante

$$I_1(x) = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!(k-1)!}.$$

La moyenne, la variance et la dispersion de cette distribution sont données par,

$$\begin{aligned} E[Z] &= \mu, \\ \text{Var}[Z] &= 4\mu, \\ \phi &= 4/\sqrt{\mu}, \end{aligned}$$

Nous trouvons les détails et la preuve dans [Siegel \(1979\)](#).

CHAPITRE III

MÉTHODES D'APPROXIMATION DE LA DENSITÉ TWEEDIE

La distribution Tweedie n'a pas une densité avec une forme fermée, ce qui signifie que nous ne pouvons pas l'exprimer facilement. Or, cette distribution est très utile en actuariat, d'où la nécessité de trouver des méthodes pour approximer sa densité.

Dans ce chapitre, nous étudierons les méthodes d'approximation de la densité de la distribution Tweedie. L'approximation de la densité est basée sur les méthodes suivantes : la méthode d'inversion de Fourier, la méthode de développement en séries infinies et la méthode de point-selle. La précision de ces méthodes va être examinée à $p = 1.5$.

3.1 L'approximation de la densité Tweedie par la méthode d'inversion de Fourier

L'approximation de la densité Tweedie par la méthode d'inversion de Fourier se base sur l'inversion de la fonction génératrice des cumulants telle que définie dans l'équation (2.19) vue dans la section 2.2. La fonction génératrice des cumulants des modèles de dispersion exponentielle, et par conséquent le modèle Tweedie s'écrit sous une forme fermée simple

$$K_Z(t) = \frac{1}{\phi} [\kappa(\theta + t\phi) - \kappa(\theta)] . \quad (3.1)$$

Pour approximer la densité Tweedie par cette méthode, nous avons besoin de la formule (2.22)

$$f_Z(z, \mu, \phi) = a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{\mu^{1-p} - 1}{1-p} - \frac{\mu^{2-p} - 1}{2-p} \right) \right],$$

et la formule (2.16)

$$f_Z(z, \mu, \phi) = b(z, \phi) \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\},$$

de la densité de Tweedie.

L'expression de $\kappa(\theta)$ dans l'équation (2.21)

$$\kappa(\theta) = \begin{cases} \frac{\mu^{2-p} - 1}{2-p} & p \neq 2 \\ \log \mu & p = 2 \end{cases}$$

montre que la fonction génératrice des cumulants de l'équation (3.1) a une forme analytique simple, cependant les fonctions $a(\cdot)$ et $b(\cdot)$ dans les équations (2.13) et (2.16) respectivement n'ont pas de forme fermée, comme nous l'avons vu dans la sous section 2.1.7. Pour évaluer ces fonctions, nous utilisons alors l'approche d'inversion de Fourier.

3.1.1 Inversion de Fourier de la fonction caractéristique

La fonction de densité d'une distribution continue appartenant aux EDM peut être représentée sous la forme d'une intégrale en utilisant la fonction caractéristique de cette distribution, tel que le montre le théorème suivant

Théorème 3.1.1. (*Peters et Shevchenko, 2015*) *Considérons la variable aléatoire Y avec fonction de répartition $F_Y(y)$, fonction de densité $f_Y(y)$, et fonction caractéristique $\phi_Y(t)$, telle que $f_Y(y)$ et $\phi_Y(t)$, de l'équation (1.11), sont des fonctions*

intégrables. Nous pouvons obtenir, par l'inversion de Fourier de la fonction caractéristique, la densité

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int \phi_Y(t) \exp(-ity) dt. \quad (3.2)$$

Afin de simplifier les calculs dans l'approximation de la densité Tweedie par l'inversion de Fourier, [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont effectué un changement d'échelle dans la fonction $f_Z(z, \mu, \phi)$ des équations (2.22) et (2.16).

Par la propriété d'invariance au changement d'échelle de la distribution Tweedie, vue dans la sous section 2.2.3, nous pouvons écrire la densité de Z sous la forme suivante

$$f_Z(z, \mu, \phi) = cf_Y(cz, c\mu, c^{2-p}\phi), \quad \text{pour tout } z > 0 \text{ et } c > 0.$$

Cette transformation nous permettra de simplifier l'expression de la densité, $f_Z(z, \mu, \phi)$, des équations (2.22) et (2.16). À cet effet, [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont proposé trois façons pour évaluer la densité Tweedie par l'inversion de Fourier.

Méthode 1

Dans cette première méthode, [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont posé $\mu = 1$ directement dans la formule de la fonction de densité (2.22), ce qui donne alors

$$\begin{aligned} f_Z(z, \mu, \phi) &= f_Z(z, 1, \phi) \\ &= a'(z, \phi) \exp \left[\frac{1}{\phi} \left(z \frac{1^{1-p} - 1}{1-p} - \frac{1^{2-p} - 1}{2-p} \right) \right] \\ &= a'(z, \phi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans ce cas, nous n'avons pas besoin d'utiliser le changement d'échelle et nous pouvons appliquer l'inversion de Fourier sur la fonction $a'(z, \phi)$ de l'équation (2.22) au lieu de $f_Z(z, \mu, \phi)$ afin de simplifier les calculs.

Méthode 2

Cette méthode utilise également la formule de densité de Tweedie de l'équation (2.22). Nous utilisons encore $\mu = 1$.

Dunn et Smyth (2008) ont choisi $c = \frac{1}{\mu}$ dans la densité transformée de l'équation (2.24). En remplaçant c par $\frac{1}{\mu}$ dans $cf_Y(cz, c\mu, c^{2-p}\phi)$, nous trouvons que $f_Z(z, \mu, \phi) = \frac{1}{\mu} f_Y(z/\mu, 1, \phi/\mu^{2-p})$. Nous aurons alors $f_Y(z/\mu, 1, \phi/\mu^{2-p}) = a'(z/\mu, \phi/\mu^{2-p})$, ce qui implique que $f_Z(z, \mu, \phi) = \frac{1}{\mu} a'(z/\mu, \phi/\mu^{2-p})$.

Afin de simplifier les calculs, nous appliquons l'inversion de Fourier, dans ce cas, sur la fonction $a'(z/\mu, \phi/\mu^{2-p})$ à la place de $f_Z(z, \mu, \phi)$.

Méthode 3

Cette méthode utilise la formule de la densité Tweedie de l'équation (2.16). Posons $z = \mu$, donc $f_Z(z, z, \phi) = b(z, \phi) = cf_Y(cz, cz, c^{2-p}\phi)$.

Dunn et Smyth (2008) ont choisi $c = \frac{1}{z}$, nous aurons alors $z = \mu = 1$, ce qui signifie que $f_Y(1, 1, \phi/z^{2-p}) = b(1, \phi/\mu^{2-p}) = b(1, \xi)$ avec $\xi = \phi/\mu^{2-p}$ et $b(z, \phi) = \frac{1}{z} b(1, \xi)$.

Dans ce cas, nous appliquons l'inversion de Fourier sur la fonction $b(1, \xi)$, ce qui signifie que la performance de la méthode 3 dépend de ξ seulement.

Dans les méthodes 1 et 2, les auteurs ont utilisé $\mu = 1$, dans l'équation (2.22), il suffit donc d'évaluer la fonction $a'(\cdot)$ au lieu de $f_Z(\cdot)$ dans le calcul de la densité par l'inversion de Fourier, ce qui simplifiera beaucoup les calculs. Ils ont également choisi $z = \mu$ dans la méthode 3 pour utiliser la fonction $b(\cdot)$, de l'équation (2.16), à la place de la fonction $f_Z(\cdot)$, afin de simplifier le calcul de la densité obtenue par l'inversion de Fourier.

Par le théorème 3.1.1, la fonction de densité de Z , pour $\mu = 1$ (comme montré

plus haut dans l'équation (3.3)), peut s'écrire ainsi

$$f_Z(z, 1, \phi) = a'(z, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int M_Z(it) \exp(-itz) dt, \quad (3.4)$$

où i est l'unité imaginaire, dont le carré vaut -1 , et M_Z est la fonction génératrice des moments non-conditionnelle de Z . Afin d'éviter la confusion entre la notation de la fonction caractéristique $\phi_Z(t)$ et la dispersion ϕ , nous utilisons la fonction génératrice des moments $M_Z(it)$ à la place de la fonction caractéristique $\phi_Z(t)$. Dans ce cas, la fonction génératrice des moments non-conditionnelle de Z s'écrit comme suit

$$M_Z(it) = \int_0^\infty \exp(itz) f_Z(z, 1, \phi) dz. \quad (3.5)$$

La densité Tweedie avec $1 < p < 2$ n'est pas continue à $Z = 0$, donc nous ne pouvons pas utiliser la formule d'inversion directement. Il est nécessaire de considérer la distribution conditionnelle continue $\{Z \mid Z > 0\}$. Nous avons ainsi

$$P(Z = 0) = \exp(-\lambda) = \exp\{-\mu^{2-p}/[\phi(2-p)]\},$$

avec $\lambda = \mu^{2-p}/[\phi(2-p)]$. Pour $\mu = 1$, nous avons $\lambda = 1/[\phi(2-p)]$.

Proposition 3.1.1. *La fonction génératrice des moments conditionnelle de Z , notée $M_Z^*(it)$, pour $Z > 0$, s'écrit comme suit*

$$M_Z^*(it) = E[\exp(itZ) \mid Z > 0] = \frac{M_Z(it) - \exp(-\lambda)}{1 - \exp(-\lambda)}. \quad (3.6)$$

Preuve. La fonction génératrice des moments conditionnelle $M_Z^*(it)$ est calculée en fonction de densité conditionnelle $f_{Z|Z>0}$. Notons F^* la fonction de répartition de $Z \mid Z > 0$, et f^* la densité de probabilité qui lui est associée.

Nous avons par définition $F_Z(z) = P(Z \leq z)$ et nous pouvons exprimer $F^*(z)$ en

fonction de $F(z)$ comme suit

$$\begin{aligned}
 F^*(z) &= P(Z \leq z \mid Z > 0) \\
 &= \frac{P(Z \leq z, Z > 0)}{P(Z > 0)} \\
 &= \frac{P(Z \leq z) - P(Z \leq z, Z \leq 0)}{1 - P(Z \leq 0)} \\
 &= \frac{P(Z \leq z) - P(Z \leq z, Z = 0)}{1 - P(Z = 0)} \\
 &= \frac{P(Z \leq z) - P(Z \leq 0)}{1 - P(Z = 0)} \\
 &= \frac{F_Z(z) - P(Z = 0)}{1 - P(Z = 0)}.
 \end{aligned}$$

Nous avons par définition $f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$, nous pouvons conclure alors

$$f^*(z) = \frac{f_Z(z) - P(Z = 0)}{1 - P(Z = 0)}.$$

De l'équation (3.5), nous pouvons écrire la fonction génératrice des moments conditionnelle $M_Z^*(it)$ comme suit

$$\begin{aligned}
 M_Z^*(it) &= \int_0^\infty \exp(itz) f^*(z, 1, \phi) dz \\
 &= \int_0^\infty \exp(itz) \frac{f_Z(z, 1, \phi) - \exp(-\lambda)}{1 - \exp(-\lambda)} dz \\
 &= \frac{1}{1 - \exp(-\lambda)} \int_0^\infty (\exp(itz) f_Z(z, 1, \phi) - \exp(-\lambda)) dz \\
 &= \frac{M_Z(it) - \exp(-\lambda)}{1 - \exp(-\lambda)}. \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

□

En remplaçant $M_Z^*(it)$ par l'expression précédente (3.7), dans l'équation (3.4), nous obtenons la densité conditionnelle par l'inversion de Fourier (notée $a'_*(z, \phi)$)

qui s'écrit comme suit

$$a'_*(z, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{M_Z(it) - \exp(-\lambda)}{1 - \exp(-\lambda)} \right) \exp(-itz) dt \quad (3.8)$$

$$= \frac{1}{2\pi[1 - \exp(-\lambda)]} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[k(t)] - \exp(-\lambda - itz) dt, \quad (3.9)$$

où $k(t) = \log M_Z(it) - itz$.

La fonction caractéristique dans l'équation (3.9) produit des intégrales infinies très oscillantes. La figure 3.1 illustre un exemple d'une intégrale oscillante qui converge lentement. Cela rend l'utilisation de l'inversion de Fourier numériquement difficile pour évaluer l'intégrale infinie avec une bonne précision numérique. Dunn et Smyth (2008) ont combiné l'inversion de Fourier et d'autres méthodes d'accélération¹ qui extrapolent la série basée sur un nombre limité de termes, afin d'évaluer cette intégrale avec précision.

Pour pouvoir évaluer l'intégrale de cette fonction, nous commençons par extraire les composantes réelles et imaginaires de l'équation (3.9) en utilisant la fonction caractéristique exprimée par l'équation (1.10). Cet intervalle est symétrique par rapport à 0. La symétrie dépend de la fonction caractéristique dans la formule (3.2), elle est purement réelle et paire, donc l'inversion de Fourier est paire.

Par la propriété de symétrie hermitienne² de la transformée de Fourier : si la fonction prend des valeurs purement réelles, alors la transformée de Fourier de cette fonction est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

1. Les méthodes d'accélération sont des méthodes qui calculent l'intégrale oscillante de façon très rapide et donnent une meilleure précision.

2. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X à valeurs réelles est hermitienne, alors $\phi_X(t) = \phi_X^*(-t)$, où $*$ est le conjugué complexe de ϕ .

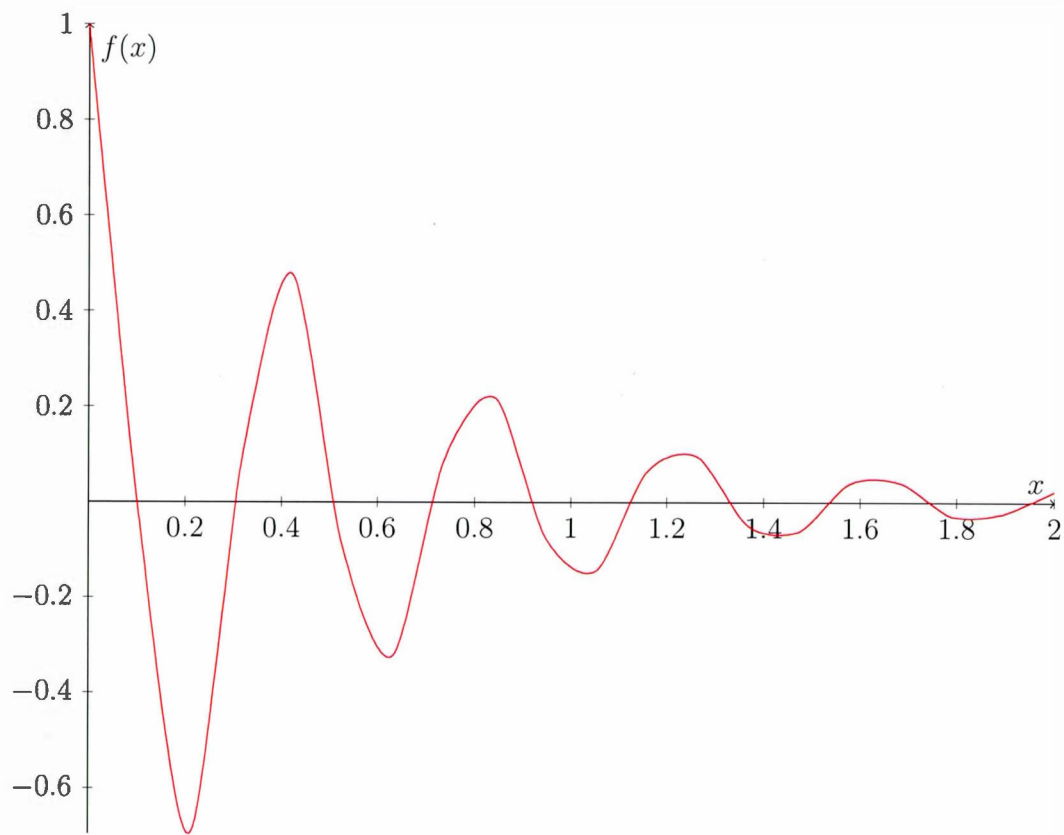


Figure 3.1 Exemple qui illustre la convergence d'une intégrale oscillante.

Ce qui nous permet de simplifier les limites et d'étudier l'intégrale sur $[0, +\infty[$.

Proposition 3.1.2. *La fonction $a'_*(z, \phi)$ s'exprime comme*

$$a'_*(z, \phi) = \frac{1}{\pi[1 - \exp(-\lambda)]} \int_0^\infty \exp[\Re k(t)] \cos \Im k(t) - \exp(-\lambda) \cos(tz) dt, \quad (3.10)$$

où

$$\Im k(t) = \frac{1}{\phi(2-p)} \frac{\sin(\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha} - zt,$$

$$\Re k(t) = \frac{1}{\phi(2-p)} \frac{\cos(\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha} - \frac{1}{\phi(2-p)}, \quad \text{et} \quad \zeta = \tan^{-1}[(1-p)t\phi].$$

Preuve. D'après l'équation (2.20), nous avons

$$\mu = \tau(\theta) = \kappa'(\theta) = [(1-p)\theta + 1]^{1/(1-p)}, \quad \text{pour } p \neq 1,$$

pour $\theta = it\phi$, et en posant $\tan(\zeta) = (1-p)t\phi$, nous avons

$$\begin{aligned} \tau(it\phi) &= [(1-p)it\phi + 1]^{1/(1-p)} \\ &= [i \tan(\zeta) + 1]^{1/(1-p)} \\ &= \left[\frac{i \sin(\zeta) + \cos(\zeta)}{\cos(\zeta)} \right]^{1/(1-p)} \\ &= \left[\frac{\exp(i\zeta)}{\cos(\zeta)} \right]^{1/(1-p)} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{i\zeta}{1-p}\right)}{[\cos(\zeta)]^{\frac{1}{1-p}}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \tau(it\phi)^{2-p} &= \frac{\exp\left(\frac{i\zeta}{1-p}\right)^{2-p}}{[\cos(\zeta)]^{\frac{2-p}{1-p}}} \\
 &= \frac{\exp\left(i\zeta\frac{2-p}{1-p}\right)}{[\cos(\zeta)]^{\frac{2-p}{1-p}}} \\
 &= \frac{\exp(i\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha}.
 \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.9), nous avons

$$\begin{aligned}
 k(t) &= \log M_Z(it) - itz \\
 &= \frac{1}{\phi} [\kappa(\theta + it\phi) - \kappa(\theta)] - itz \text{ (par l'équation 2.19)} \\
 &= \frac{1}{\phi} \kappa(it\phi) - itz \text{ (car pour } \theta = 0, \text{ nous avons } \mu = 1 \text{ et } \kappa(\theta) = 0) \\
 &= \frac{\tau(it\phi)^{2-p} - 1}{\phi(2-p)} - itz \text{ (par l'équation 2.21)} \\
 &= \frac{\frac{\exp(i\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha} - 1}{\phi(2-p)} - itz \\
 &= \frac{1}{\phi(2-p)} \cdot \frac{\exp(i\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha} - \frac{1}{\phi(2-p)} - itz,
 \end{aligned}$$

la partie réelle et la partie imaginaire de $k(t)$ sont donc comme suit

$$\begin{aligned}
 \Im k(t) &= \frac{1}{\phi(2-p)} \frac{\sin(\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha} - zt, \\
 \Re k(t) &= \frac{1}{\phi(2-p)} \frac{\cos(\zeta\alpha)}{[\cos(\zeta)]^\alpha} - \frac{1}{\phi(2-p)}.
 \end{aligned}$$

□

Pour évaluer l'intégrale oscillante, nous devons étudier d'abord son comportement à l'infini : nous avons $\zeta = \tan^{-1}[(1-p)t\phi]$ qui converge vers $-\frac{\pi}{2}$ lorsque t tend vers l'infini. Donc, le $\cos(\zeta)$ converge vers 0 lorsque t tend vers l'infini. D'autre

part, nous avons $\alpha = (2 - p)/(1 - p) < 0$ puisque $1 < p < 2$, et par conséquent $[\cos(\zeta)]^\alpha$ tend vers l'infini, pour $t \rightarrow \infty$. Comme $\sin(\zeta\alpha) \rightarrow \sin(-\frac{\pi}{2}\alpha)$, cela montre que la première partie de $\Im k(t)$

$$\frac{1}{\phi(2-p)} \frac{\sin(\zeta\alpha)}{(\cos \zeta)^\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{pour } t \rightarrow \infty.$$

Donc, $\Im k(t)$ converge vers $-zt$ lorsque t tend vers l'infini. De même, nous pouvons montrer que la première partie de la composante réelle converge vers zéro pour $t \rightarrow \infty$, nous avons $\cos(\zeta\alpha)$ qui converge vers une constante, nous aurons alors

$$\frac{1}{\phi(2-p)} \frac{\cos(\zeta\alpha)}{(\cos \zeta)^\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{pour } t \rightarrow \infty.$$

Donc, $\Re k(t)$ converge vers $-\frac{1}{\phi(2-p)} = -\lambda$, lorsque t tend vers l'infini et $\mu = 1$. Alors,

$$\exp[\Re k(t)] \cos \Im k(t) - \exp(-\lambda) \cos(tz) \rightarrow \exp(-\lambda) \cos(tz) - \exp(-\lambda) \cos(tz) = 0, \\ \text{pour } t \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Par conséquent, les deux termes dans l'intégrale de la formule (3.10) s'annulent entre eux asymptotiquement, ce qui montre que l'intégrand converge vers 0, lorsque t tend vers l'infini, et nous pouvons ainsi l'approximer.

Lorsque nous trouvons la densité conditionnelle $a^*(z, \phi)$, nous pouvons évaluer la densité non conditionnelle comme suit

De l'équation (3.8)

$$\begin{aligned} a'_*(z, \phi)[1 - \exp(-\lambda)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [M_Z(it) - \exp(-\lambda)] \exp(-itz) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M_Z(it) \exp(-itz) dt - \exp(-\lambda) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itz) dt \\ &= a'(z, \phi) - \exp(-\lambda) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itz) dt \\ &= a'(z, \phi) - \exp(-\lambda) d_0(z), \end{aligned}$$

où $d_0(z)$ est la fonction delta Dirac définie comme suit

$$d_0(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$a'(z, \phi) = a'_*(z, \phi) [1 - \exp(-\lambda)] + d_0(z) \exp(-\lambda).$$

Tableau 3.1 Comparaison entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier pour les méthodes 1, 2 et 3, avec des zéros exacts, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

z	densité Bessel	inverse F.m1	inverse F.m2	inverse F.m3
0.001	0.135335	0.135335	0.135335	0.135335
0.01	0.135335	0.135335	0.135335	0.135335
0.05	0.135321	0.135321	0.135321	0.135321
0.1	0.13528	0.13528	0.13528	0.13528
0.5	0.134039	0.134039	0.134039	0.134039
1	0.130567	0.130567	0.130567	0.130567
2	0.119232	0.119232	0.119232	0.119232
3	0.104744	0.104744	0.104744	0.104744
4	0.0893754	0.0893754	0.0893754	0.0893754
5	0.0745335	0.0745335	0.0745335	0.0745335
6	0.0610078	0.0610078	0.0610078	0.0610078
7	0.0491654	0.0491654	0.0491654	0.0491654
8	0.0391003	0.0391003	0.0391003	0.0391003
9	0.0307413	0.0307413	0.0307413	0.0307413
10	0.0239277	0.0239277	0.0239277	0.0239277
15	0.00608121	0.00608121	0.00608121	0.00608121
20	0.00134336	0.00134336	0.00134336	0.00134336
50	3.80292e-08	0	3.80292e-08	3.80292e-08
100	1.10819e-16	2632.99*	1.08503e-16	1.10819e-16
1000	4.45825e-194	0	0	4.45825e-194

Tableau 3.2 L'erreur relative \log_{10} entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier pour les méthodes 1,2 et 3, avec des zéros exacts, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

z	erreur relative m1	erreur relative m2	erreur relative m3
0.001	-11	-9.3	-14
0.01	-14	-14	-14
0.05	-14	-14	-13
0.1	-14	-14	-14
0.5	-14	-14	-13
1	-13	-14	-13
2	-13	-14	-13
3	-13	-14	-13
4	-15	-13	-13
5	-14	-13	-13
6	-15	-13	-13
7	-14	-13	-13
8	-13	-13	-13
9	-13	-15	-13
10	-13	-14	-13
15	-11	-14	-13
20	-10	-13	-13
50	0	-10	-13
100	19	-1.7	-11
1000	0	0	-14

Pour pouvoir comparer les 3 méthodes discutées plus haut, nous calculons la densité pour chaque méthode ainsi que le logarithme décimal de l'erreur relative correspondant, pour différentes valeurs de z . Le tableau 3.1 représente la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier pour les méthodes 1, 2 et 3, avec des zéros exacts³, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$. Nous observons clairement que les valeurs de la densité calculées par la méthode 3 sont plus proches de la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ par rapport aux autres méthodes. Le calcul du logarithme décimal de l'erreur relative dans le tableau 3.2 affirme aussi que la méthode 3 est plus précise que les deux autres méthodes, le logarithme décimal de l'erreur relative est entre -11 et -14 pour cette méthode. Donc, la méthode 3 permet de calculer les densités avec une bonne précision, pour toutes les valeurs de z .

Les méthodes 1 et 2 n'approximent pas la densité avec précision, nous remarquons par exemple, que pour l'observation $z = 100$, le calcul de la densité, par la méthode 1, donne une valeur de (2632.99), qui ne peut pas être une valeur de densité. Les résultats sont obtenus à l'aide d'un programme C++, en utilisant le programme Fortran dans (Dunn, 2007), cette valeur est de (4212.79).

3.1.2 Approximation de l'intégrale oscillante

Pour approximer l'intégrale oscillante, nous devons chercher les zéros de la fonction intégrée de l'équation (3.10), puis nous intégrons entre ces zéros et ensuite nous additionnons les intégrales trouvées.

L'intégrale oscillante peut être évaluée en utilisant des zéros exacts (Sidi, 1980 ; Sidi, 1997) ou des zéros approximatifs. Les zéros exacts sont difficiles à localiser et prennent plus de temps à calculer par rapport aux zéros approximatifs, mais donnent une meilleure précision.

3. Les zéros exacts désignent les racines de l'intégrale oscillante calculée de façon précise.

Approximation de l'intégrale oscillante en utilisant des zéros exacts

Pour trouver les zéros exacts de l'intégrale dans l'équation (3.10), comme illustré dans la figure 3.1, nous utilisons la méthode de Newton, vue dans la sous section 1.1.2. Afin que la convergence de la méthode de Newton soit garantie, nous identifions des bornes ou un intervalle pour chaque zéro successif. Cela se réalise en utilisant une combinaison de la méthode de Newton-Raphson et la méthode de bisection (sous section 1.1) entre deux bornes x_1 et x_2 , proposée par Press *et al.* (1996, page 366). C'est une version modifiée de la méthode Newton avec un contrôle pour localiser le zéro dans cet intervalle. Nous initialisons le point de départ de la méthode Newton par interpolation linéaire entre x_1 et x_2 telle que

$$x_0 = x_2 - f(x_2) \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

L'algorithme de cette méthode est illustré comme suit

Algorithme 3 Combinaison de la méthode de Newton-Raphson et la méthode de bisection.

1. Si $[(x_0 - x_1)f'(x_0) - f(x_0)] \times [(x_0 - x_2)f'(x_0) - f(x_0)] > 0$,
ou $|2f(x_0)| > |(x_2 - x_1)f'(x_0)|$,
 2. Alors $x_0 = x_0 + \frac{x_2 - x_1}{2}$,
 3. Sinon $x_0 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
-

En termes brefs, l'algorithme assure que la méthode de Newton reste à l'intérieur de l'intervalle identifié. Si la solution tente de quitter les bornes de l'intervalle, alors l'algorithme passe à la méthode de bisection pour affiner la position du zéro, en vérifiant que l'intégrale change de signe entre les bornes de l'intervalle, jusqu'à ce que la méthode de Newton puisse être utilisée à nouveau.

Pour t grand, la distance entre les zéros devient égale, ce qui facilite le travail dans la pratique (Dunn et Smyth, 2008). La zone initiale située entre $t = 0$ et le premier zéro peut être en forme irrégulière. Pour mieux évaluer cette partie

d'intégrale, [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont divisé cette région en 20 panneaux. La zone dans chaque panneau est évaluée en utilisant 512 points d'intégration de Gauss, vus dans la section 1.2.

Parfois, un grand nombre de zéros et d'intégrales sont nécessaires pour obtenir la convergence. L'évaluation devient ainsi très lente et l'erreur d'arrondi ⁴ peut dépasser la précision. Pour évaluer les intégrales infinies oscillantes qui se produisent dans l'inversion de Fourier, nous utilisons une autre méthode qui économise les calculs et donne une meilleure précision. [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont utilisé l'accélération de [Sidi \(2003\)](#), appelée W-transformation, qui converge plus rapidement. Cette méthode est illustrée selon la démarche suivante.

Soit l'intégrale infinie

$$W = \int_0^{\infty} f(x)dx,$$

où f est une fonction oscillante et a des zéros à $x = x_0, x_1, \dots$. Les intégrales entre les zéros successifs sont

$$w(x_j) = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)dt,$$

et pour le premier zéro, nous avons

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

L'intégrale reste souvent de forme irrégulière pour les premiers zéros, où la quadrature de Gauss est utilisée, et la W-transformation est appelée à partir du quatrième zéro au lieu du premier. [Dunn et Smyth \(2008\)](#) ont calculé les intégrales

4. Les erreurs d'arrondi représentent la différence entre la valeur approchée calculée d'un nombre et sa valeur mathématique exacte. Elles peuvent devenir des erreurs importantes dans les calculs informatiques impliquant des milliers ou des millions d'opérations mathématiques.

finies $F(x_j)$ et $w(x_j)$ entre les premiers zéros, à l'aide de la quadrature de Gauss de 512 points. Ces intégrales sont nécessaires comme des entrées dans l'algorithme de Sidi.

Pour les intégrales entre les autres zéros, nous utilisons la W-transformation modifiée de Sidi (1988), qui est définie par un système de $r + 2$ équations linéaires

$$W_r = F(x_j) + w(x_j) \sum_{i=0}^r \frac{v_i}{x_j^i}, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq r + 1,$$

où W_r est l'approximation de W basée sur $r + 1$ termes pour v_i inconnu. Notons que le r est fixé selon la convergence de W_r , c'est-à-dire lorsque les valeurs de W_r deviennent stables quel que soit r . Ce système d'équations linéaires peut être résolu de plusieurs manières après avoir été écrit sous forme matricielle.

Sidi (2003) a développé un algorithme récursif, appelé W-algorithme, qui est pratique et efficace pour la résolution de ce système et comprend un petit nombre d'opérations arithmétiques et de stockage à espace minimal. Le système d'équations pourrait donc être résolu en utilisant un processus itératif. Dans la pratique, nous utilisons l'algorithme suivant

Nous commençons d'abord par définir les entrées de l'algorithme comme suit

$$\begin{aligned} M_{-1}^{(s)} &= F(x_s)/w(x_s), \\ N_{-1}^{(s)} &= 1/w(x_s), \\ w(x_{j-1}) &= F(x_j) - F(x_{j-1}), \end{aligned}$$

où $s = 0, 1, \dots$ est le nombre d'intégrales entre les zéros successifs.

Pour $p = 1, 2, \dots$, nous calculons

$$\begin{aligned} M_p^{(s)} &= (M_{p-1}^{(s)} - M_{p-1}^{(s+1)}) / (x_s^{-1} - x_{s+p+1}^{-1}), \\ N_p^{(s)} &= (N_{p-1}^{(s)} - N_{p-1}^{(s+1)}) / (x_s^{-1} - x_{s+p+1}^{-1}), \\ W_p^{(s)} &= M_p^{(s)} / N_p^{(s)}. \end{aligned}$$

Sous l'erreur d'arrondi, W_r devient une approximation de plus en plus précise de W lorsque r augmente. La convergence est détectée en comparant l'estimation la plus récente de l'intégrale avec les deux estimations précédentes. L'estimation de l'erreur relative est donnée par Piessens *et al.* (1983).

$$E_{rel} = \frac{|W_r - W_{r-1}| + |W_r - W_{r-2}|}{W_r}. \quad (3.12)$$

Lorsque $E_{rel} < 10^{-10}$, l'algorithme s'arrête et les rapports W_r sont considérés comme des meilleures estimations de l'intégrale. L'équation (3.12) montre qu'il faut avoir au moins $r = 2$ pour une estimation de l'erreur relative. Cela signifie que cinq zéros et cinq intégrales finies sont évaluées avant que la convergence ne soit testée.

Évaluation de l'intégrale en utilisant des zéros approximatifs

Les zéros approximatifs sont faciles à localiser et permettraient d'éviter la recherche des zéros exacts, lesquels se produisent aux zéros du $\cos \Im \kappa(t)$ de l'équation (3.10) qui se rapprochent de ceux de $\cos(tz)$, lorsque $t \rightarrow \infty$, comme suggéré par la formule (3.11). Donc, les zéros de l'intégrand sont asymptotiquement ceux du $\cos(tz)$, c'est-à-dire que les zéros finiront par s'approcher arbitrairement de $(\pi + 2m\pi)/(2z)$ pour m entier.

Les étapes de calculs de l'intégrale par la méthode des zéros approximatifs se résument comme suit

1. nous commençons par prendre $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{\pi}{2z}$;
2. nous calculons l'intégrale entre z_1 et z_2 par la quadrature de Gauss ;
3. Pour continuer, nous prenons $z_1 = z_2$ et $z_2 = z_2 + \frac{\pi}{z}$;
4. nous calculons de nouveau l'intégrale entre z_1 et z_2 par la quadrature de Gauss, ensuite nous utiliserons l'accélération de Sidi pour accélérer la convergence, que nous avons aussi utilisée pour les zéros exacts, jusqu'à la convergence, c'est-à-dire lorsque E_{rel} devient plus petite que 10^{-10} .

La précision obtenue en utilisant les zéros asymptotiques diminue à des niveaux inacceptables pour les petites valeurs de z , ce qui rend alors nécessaire de déterminer les zéros exacts.

Tableau 3.3 Comparaison entre l'erreur relative \log_{10} de la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros exacts et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros approximatifs, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

z	dens.z.exacts	dens.z.approxi	erreur.z.exacts	erreur.z.approxi
0.001	0.135335	0.135335	-14	-13
0.01	0.135335	0.135335	-14	-14
0.05	0.135321	0.135321	-13	-14
0.1	0.13528	0.13528	-14	-14
0.5	0.134039	0.134039	-13	-14
1	0.130567	0.130567	-13	-14
2	0.119232	0.119232	-13	-14
3	0.104744	0.104744	-13	-14
4	0.0893754	0.0893754	-13	-14
5	0.0745335	0.0745335	-13	-14
6	0.0610078	0.0610078	-13	-14
7	0.0491654	0.0491654	-13	-14
8	0.0391003	0.0391003	-13	-14
9	0.0307413	0.0307413	-13	-14
10	0.0239277	0.0239277	-13	-14
15	0.00608121	0.00608121	-13	-14
20	0.00134336	0.00134336	-13	-14
50	3.80292e-08	3.80292e-08	-13	-14
100	1.10819e-16	1.10819e-16	-11	-9
1000	4.45825e-194	4.45825e-194	-14	-11

L'approche d'inversion de Fourier par la méthode 3 montre une bonne précision relative pour différentes valeurs de z . À partir du tableau 3.3 et la figure 3.3, nous pouvons remarquer que l'estimation de la densité avec des zéros exacts donne une meilleure précision relative que des zéros asymptotiques pour les valeurs de z extrêmes, c'est-à-dire les plus petites valeurs de z , dans le tableau ($z = 0.001$) et les plus grandes valeurs de z , ($z = 1000$). Par contre, les zéros approximatifs donnent une meilleure approximation de densité pour les valeurs intermédiaires de z .

Par ailleurs, la précision obtenue ici est meilleure que celle obtenue dans l'article [Dunn et Smyth \(2008\)](#), et cela est dû à l'utilisation du programme C++ à la place du programme Fortran utilisé dans l'article.

Les grandes valeurs de $\xi = \phi/\mu^{2-p}$, dans la méthode 3, correspondent généralement à des intégrales plus oscillantes dont la décroissance est plus lente, ce qui signifie que la précision peut se détériorer pour ϕ grand ou pour z petit. Cependant, l'utilisation de la méthode de Sidi accélère la convergence et améliore énormément la précision de la méthode d'inversion. De façon générale, la méthode d'inversion fonctionne mieux pour les grandes valeurs de z que pour les petites valeurs de z , pour différentes valeurs de la puissance p .

La figure 3.2 compare la densité Tweedie obtenue par la méthode d'inversion de Fourier et la densité Bessel et montre que la méthode d'inversion de Fourier estime la densité Tweedie avec précision, la ligne en rouge représentant la densité approximée et les petits carrés en couleur bleue représentent la densité exacte calculée à partir de la fonction Bessel.

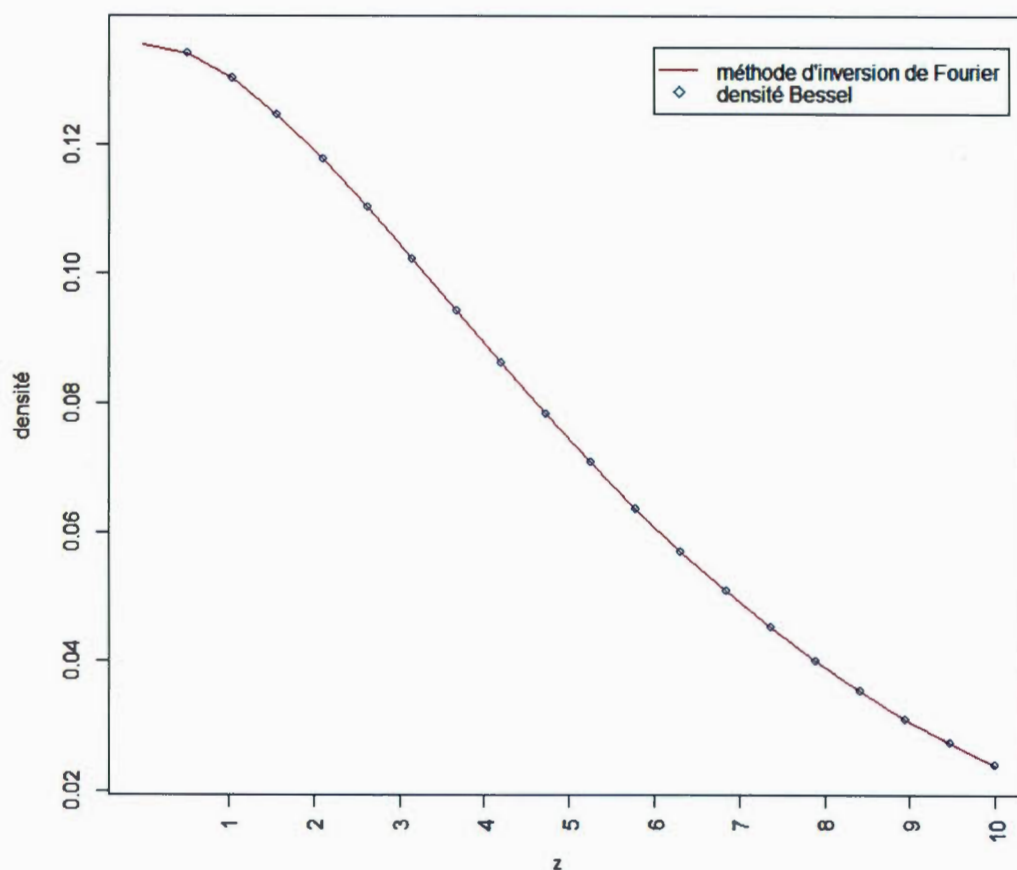


Figure 3.2 Comparaison des densités : la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros exacts, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

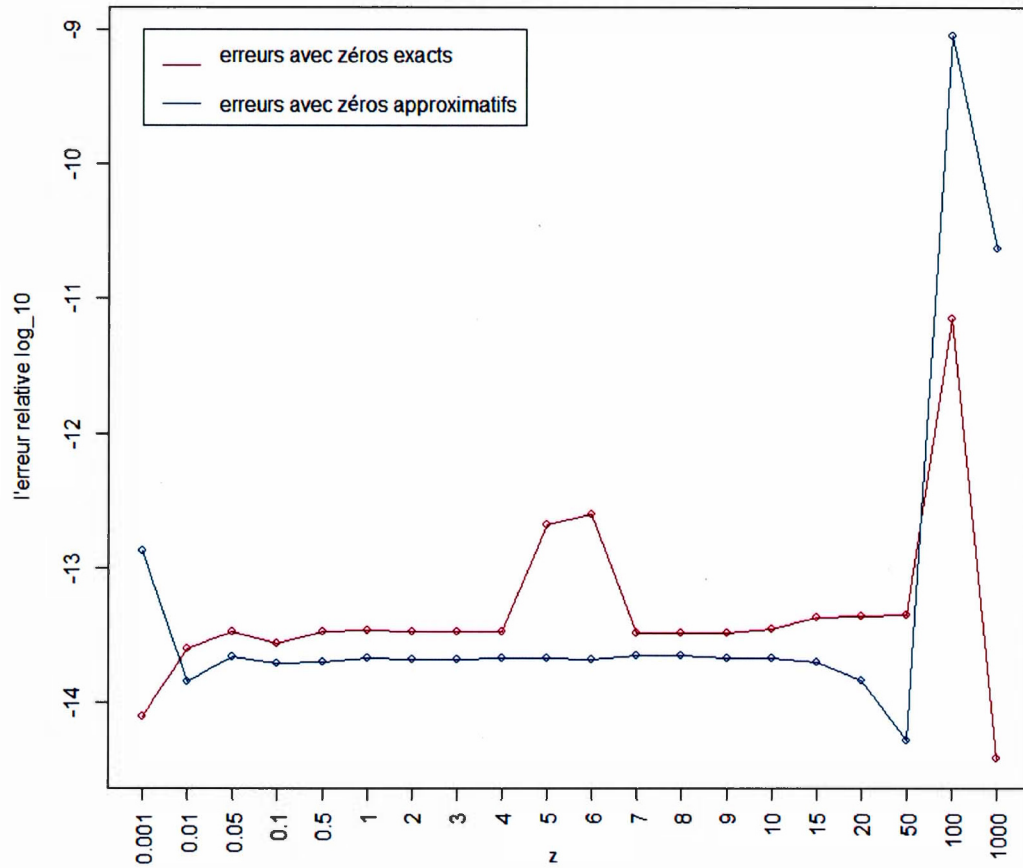


Figure 3.3 Graphique de l'erreur relative \log_{10} de la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros exacts et la densité de Tweedie approximée par l'inversion de Fourier avec des zéros approximatifs, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

3.2 L'approximation de la densité Tweedie par la méthode de développement en séries infinies

La densité de la distribution Tweedie peut être évaluée par un développement en séries infinies (Smyth, 1996). Gilchrist et Drinkwater(1999) ont ainsi examiné le développement en série de la densité Poisson-Gamma. En sommant les termes de la série, ils ont trouvé que les développements en séries infinies sont efficaces pour l'évaluation de la densité Tweedie.

L'approximation s'effectue à partir de la fonction génératrice des cumulants de la densité Tweedie de l'équation (2.19)

$$\begin{aligned} K(t) = \log M(t) &= \frac{1}{\phi} [\kappa(\theta + \phi t) - \kappa(\theta)] \\ &= \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)} \{ [1 - \phi t(p-1)\mu^{p-1}]^\alpha - 1 \}. \end{aligned}$$

Smyth (1996) a comparé cette fonction avec la fonction génératrice cumulée d'une distribution de Poisson composé, de variables aléatoires de loi $Gamma(-\alpha, \gamma)$, de l'équation (2.11), exprimée comme

$$K_Z(t) = \lambda[(1 - \gamma t)^\alpha - 1].$$

Ainsi, nous pouvons remarquer qu'ils ont la même distribution, lorsque $\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}$, $\alpha = \frac{2-p}{1-p}$ et $\gamma = \phi(p-1)\mu^{p-1}$.

À partir de la fonction de densité de la distribution Poisson-Gamma de l'équation (2.7)

$$f_Z(z, \lambda, m, \alpha) = \sum_{n \geq 1} f_{N,Y}(n, z, \lambda, m, \alpha),$$

nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned}
 f_Z(z, \mu, \phi) &= P(N=0)d_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} P(N=j)f_{Z|N=j}(z) \\
 &= \exp(-\lambda)d_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j \exp(-\lambda)}{j!} \frac{z^{-j\alpha-1} \exp(-z/\gamma)}{\gamma^{-j\alpha}\Gamma(-j\alpha)} \\
 &= \exp(-\lambda)d_0(z) + \exp(-\lambda)z^{-1} \exp(-z/\gamma) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \frac{z^{-j\alpha}}{\gamma^{-j\alpha}\Gamma(-j\alpha)},
 \end{aligned}$$

où $d_0(z)$ est la fonction delta de Dirac⁵. Le logarithme de cette fonction donne

$$\log f_Z(z, \mu, \phi) = \begin{cases} -z/\lambda - \lambda - \log(z) + \log W(z, \lambda, \alpha, \gamma) & \text{si } z > 0, \\ -\lambda & \text{si } z = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

avec

$$W(z, \lambda, \alpha, \gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (z/\gamma)^{-j\alpha}}{j! \Gamma(-j\alpha)}.$$

En remplaçant $\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}$ et $\gamma = \phi(p-1)\mu^{p-1}$ dans l'équation (3.13), nous trouvons

$$\log f_Z(z, \mu, \phi) = \frac{-z\mu^{1-p}}{\phi(p-1)} - \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)} - \log(z) + \log W(z, \phi, p), \quad \text{pour } z > 0,$$

où

$$\begin{aligned}
 W(z, \phi, p) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p-1)^{\alpha j} (z)^{-j\alpha}}{\phi^{j(1-\alpha)} (2-p)^j j! \Gamma(-j\alpha)} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} W_j. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

5. Elle est considérée comme une fonction qui prend une valeur 1 à 0, et la valeur zéro partout ailleurs où la masse de la fonction est concentrée en 0 et vaut 1.

avec $W_j > 0$ pour $j \geq 1$. Approximer la densité Tweedie, dans ce cas, revient à approximer la somme infinie $W(z, \phi, p)$ en sommant les termes de la série qui contribuent significativement à la somme et à ignorer les termes qui ne sont pas significatifs.

3.2.1 Évaluation de la somme infinie $W(z, \phi, p)$

Pour évaluer la somme infinie de l'équation (3.14), nous devons d'abord déterminer la valeur de j qui maximise W_j , car nous pouvons supposer que les W_j sont significatifs autour de ce j . Nous dérivons donc W_j par rapport à j et nous posons la dérivée égale à zéro.

En utilisant la notation,

$$y = \frac{z^{-\alpha}(p-1)^\alpha}{\phi^{(1-\alpha)}(2-p)},$$

les W_j peuvent s'écrire alors comme suit

$$\begin{aligned} W_j &= \frac{z^{-j\alpha}(p-1)^{j\alpha}}{\phi^{j(1-\alpha)}(2-p)^j j! \Gamma(-j\alpha)} \\ &= \frac{y^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(-j\alpha)}. \end{aligned}$$

La transformation logarithmique de W_j donne

$$\log W_j = j \log y - \log \Gamma(j+1) - \log \Gamma(-j\alpha). \quad (3.15)$$

Nous commençons par approximer les fonctions *Gamma* dans la formule (3.15) par l'approximation de Stirling. Nous remplaçons ainsi chaque fonction *Gamma* dans l'équation (3.15), par la formule de Stirling qui est équivalente à la factorielle d'un entier naturel n , quand n tend vers l'infini. Plus précisément, nous avons la relation

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (n/e)^n} = 1.$$

Ainsi,

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

L'approximation de Stirling a une excellente précision relative pour les grandes valeurs de n . Cela permet aux termes approximatifs des fonctions Gamma de l'équation (3.15) d'être dérivés puis de localiser la valeur maximale des termes de la somme en fonction d'indice de sommation j .

Afin de simplifier les calculs, nous pouvons également approximer $1 - \alpha j$ par $-\alpha j$ pour j grand, donc la formule (3.15) devient

$$\begin{aligned} \log W_j &\approx j [\log y + (1 - \alpha) + \alpha \log(-\alpha) - (1 - \alpha) \log j] - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(-\alpha) \\ &\quad - \log j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nous pouvons maintenant alors évaluer les termes approximatifs de la série $\log W_j$ par la formule précédente. En dérivant $\log W_j$, de l'équation (3.16), par rapport à j , et en égalant à zéro, nous trouvons,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log W_j}{\partial j} &\approx \log y - \frac{1}{j} - \log j + \alpha \log(-\alpha j) \\ &\approx \log y - \log j + \alpha \log(-\alpha j) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

puisque le terme $1/j$ peut être ignoré lorsque j est grand. L'équation (3.17) peut alors être résolue pour j en fonction de z , ce qui donne la solution suivante

$$j_{\max} = \frac{z^{2-p}}{(2-p)\phi}, \quad \text{avec } j_{\max} \text{ positif}, \quad (3.18)$$

qui est la valeur de l'indice pour laquelle W_j est un maximum. Comme j est l'indice de sommation, alors j_{\max} est arrondi à l'entier le plus proche.

Lorsque nous dérivons l'équation (3.16) une deuxième fois par rapport à j , nous trouvons que

$$\frac{\partial^2 \log W_j}{\partial^2 j} = \frac{\alpha - 1}{j} < 0,$$

car $\alpha < 0$ et j positif.

En remplaçant j par j_{\max} dans la dérivée seconde, nous trouvons

$$\frac{\partial^2 \log W_j}{\partial^2 j} = \alpha \phi z^{p-2}.$$

Puisque que $\phi > 0$, $z^{p-2} > 0$ et $\alpha < 0$, alors la dérivée seconde est négative à $j = j_{\max}$, ce qui signifie que j_{\max} est un maximum. De plus, la dérivée première, dans l'équation (3.17) est monotone décroissante en fonction de j , de chaque côté de j_{\max} , pour $j \geq 0$, donc la séquence $\log W_j$ est uni-modale en fonction de j . Ainsi j_{\max} est unique et donne la valeur maximale de W_j . Cette valeur peut être calculée en remplaçant le j_{\max} trouvé, dans l'équation (3.16), ce qui donne

$$\log W_{\max} = j_{\max}(\alpha - 1) - \log(2\pi) - \log j_{\max} - \frac{1}{2} \log(-\alpha).$$

Le fait que la première dérivée de $\log W_j$ par rapport à j est monotone décroissante, de chaque côté de j_{\max} implique que $\log W_j$ est strictement convexe en fonction de j et, par conséquent, W_j décroît de façon très rapide, de chaque côté de j_{\max} .

Comme mentionné précédemment, pour une évaluation rapide de la somme $W(z, \phi, p)$, il faut se débarrasser des termes qui sont négligeables dans la somme. Une manière de trouver ces termes négligeables est de fixer des limites inférieure et supérieure pour l'indice j par rapport à j_{\max} , ensuite, nous évaluons les termes significatifs de cette somme en fonction de j , de chaque côté du maximum.

La somme $W(z, \phi, p)$ peut s'écrire, en fonction des limites supérieure et inférieure de l'indice sur lequel nous sommes, comme suit

$$W(z, \phi, p) \approx \tilde{W}(z, \phi, p) = \sum_{j=j_L}^{j_U} W_j,$$

où j_L, j_U sont les limites inférieure et supérieure respectivement de l'indice j , qui garantissent une évaluation précise de la densité Tweedie.

En pratique, les termes approximatifs $\log W_j$ de l'équation (3.16) sont évalués sur chaque côté de j_{\max} , en se déplaçant plus loin de ce maximum dans les deux sens, jusqu'à ce que les termes trouvés deviennent non significatifs ou négligeables par rapport à la valeur maximale $\log W_{\max}$. Les bornes inférieure et supérieure sur l'indice j sont choisies de manière à ce que W_{j_L} et W_{j_U} soient inférieures à ϵW_{\max} , pour ϵ très petit.

Pour chaque valeur de la variable Z , nous obtenons alors W_j en fonction de j , pour $j_U > j > j_L$. Dunn et Smyth (2005) ont trouvé utile et rapide de choisir un minimum j_L et un maximum j_U communs pour toutes les observations z_i du vecteur de données. Ils ont également choisi $\epsilon = \exp(-37) \approx 8 \times 10^{-17}$, pour assurer une précision de 64 bits en arithmétique flottante⁶. Donc, nous prenons les valeurs des indices autour de j_{\max} jusqu'à ce que l'approximation de $\log W_j$ dans l'équation (3.16) soit inférieure à $\log W_{\max} - 37$. Si $j_{\max} < 1$ ou si $\log W_1 > \log W_{\max} - 37$, alors nous fixons $j_L = 1$.

Dunn et Smyth (2005) ont également normalisé les termes $\log W_j$ pour avoir une valeur maximale. Comme les termes $\log W_j$ sont tous positifs, alors nous pouvons les sommer directement, et ensuite additionner les termes exacts pour calculer la

6. Les nombres à virgule flottante à double précision sont formés de 11 bits qui sont réservés à l'exposant et 53 bits (dont 1 bit pour le signe, le signe indique si le nombre est positif ou négatif) à la mantisse qui représente le nombre à côté de l'exposant ; par exemple, soit le nombre $x = \pm a \times 10^n$ exprimé en puissance de 10, le nombre a est la mantisse de x , n est l'exposant de x et \pm le signe de x . Les réels en valeur absolue appartiennent à $[2^{-1024}, 2^{1024}] \approx [10^{-308}, 10^{308}]$ avec 15 chiffres décimaux significatifs (car $2^{52} \approx 10^{15}$).

densité, alors

$$\log \tilde{W}(z, \phi, p) = \log W_{\max} + \log \sum_{j=j_L}^{j_U} w_j,$$

où $w_j = \exp(\log W_j - \log W_{\max})$.

L'algorithme de cette méthode est donné par

Algorithme 4 Méthode de développement en séries infinies.

1. Si $z = 0$, alors $f_Z(z) = \exp(-\lambda)$, avec $\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}$,
 2. Si $z > 0$, alors $f_Z(z) = \exp\{\log f_Z(z)\}$
 et $\log f_Z(z) = \frac{-z\mu^{1-p}}{\phi(p-1)} - \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)} - \log(z) + \log W(z, \phi, p)$,
 avec $\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}$, $\alpha = \frac{2-p}{1-p}$, $\gamma = \phi(p-1)\mu^{p-1}$,
 $\log W(z, \phi, p) = \log W_{\max} + \log \sum_{j=j_L}^{j_U} \exp(\log W_j - \log W_{\max})$.
 3. Poser $\log W_{\max} = j_{\max}(\alpha - 1) - \log(2\pi) - \log j_{\max} - \frac{1}{2} \log(-\alpha)$,
 avec $j_{\max} = \frac{z^{2-p}}{(2-p)\phi}$.
 4. $\log W_j = j [\log z + (1 - \alpha) + \alpha \log(-\alpha) - (1 - \alpha) \log j] - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(-\alpha) - \log j$.
 5. Tant que $\log W_j > \log W_{\max} - 37$,
 alors $j = j + 1$ et $\log W_j = j [\log z + (1 - \alpha) + \alpha \log(-\alpha) - (1 - \alpha) \log j] - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(-\alpha) - \log j$.
 6. Tant que $\log W_j > \log W_{\max} - 37$ et $j \geq 2$,
 alors $j = j - 1$ et $\log W_j = j [\log z + (1 - \alpha) + \alpha \log(-\alpha) - (1 - \alpha) \log j] - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(-\alpha) - \log j$.
 7. Poser $j_L = \min(j)$ et $j_U = \max(j)$.
 8. Si $j_{\max} < 1$ ou si $\log W_1 > W_{\max} - 37$, alors $j_L = 1$.
-

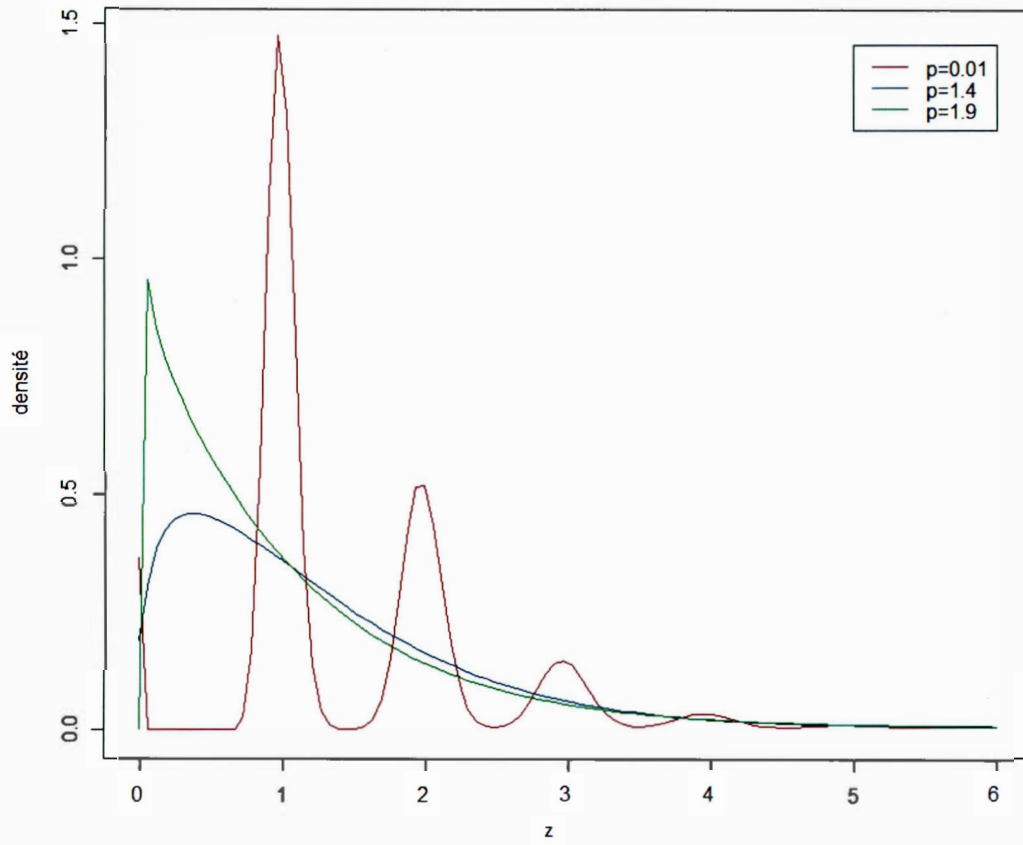


Figure 3.4 Densités aproximées par la méthode de développement en séries infinies pour $p = 0.01$, $p = 1.4$, $p = 1.9$, $\phi = 1$ et $\mu = 1$.

Les courbes de densité Tweedie, estimées par la méthode de développement en séries infinies pour différentes valeurs de p , sont représentées dans la figure 3.4. La méthode de développement en séries infinies fonctionne moins bien lorsque p s'approche de 2, car dans un tel cas, la distribution Tweedie s'approche de la distribution Gamma. Donc, la précision désirée ne peut pas être obtenue pour toutes les valeurs des paramètres.

Par ailleurs, lorsque $z \rightarrow \infty$ ou $\phi \rightarrow 0$, la méthode de développement en séries infinies ne fonctionne pas bien car le nombre de termes requis augmente considérablement et la méthode devient coûteuse. Ce comportement est dû à la forme de j_{\max} qui n'est pas bornée pour p proche de 2, z grand et ϕ petit.

Nous avons vu dans la section précédente que la méthode d'inversion fonctionne mieux pour les grandes valeurs de z . Par contre, la méthode de la série fonctionne d'une excellente façon pour les petites valeurs de z . Donc, nous pouvons dire que les deux méthodes sont complémentaires, pour différentes valeurs des paramètres.

À partir du tableau 3.4, nous observons que le logarithme décimal de l'erreur relative est entre -14 et -16, pour différentes valeurs de z , ce qui signifie que la méthode de développement en séries infinies approxime la densité Tweedie avec une très bonne précision, pour les valeurs intermédiaires de p ($p = 1.5$). La figure 3.5 confirme ce résultat, compare la précision des trois méthodes : méthode de développement en séries infinies, la méthode d'inversion, avec des zéros exacts et des zéros approximatifs, et elle indique également que le logarithme décimal de l'erreur relative donné par l'approche de développement en séries infinies est plus petit que le logarithme décimal de l'erreur relative obtenu par la méthode d'inversion, avec des zéros exacts et des zéros approximatifs pour $p = 1.5$.

Tableau 3.4 Comparaison entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode des séries infinies pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

z	densité Bessel	séries infinies	erreur relative \log_{10}
0.001	0.135335	0.135335	-15
0.01	0.135335	0.135335	-15
0.05	0.135321	0.135321	-15
0.1	0.13528	0.13528	-16
0.5	0.134039	0.134039	-16
1	0.130567	0.130567	-15
2	0.119232	0.119232	-15
3	0.104744	0.104744	-15
4	0.0893754	0.0893754	-15
5	0.0745335	0.0745335	-15
6	0.0610078	0.0610078	-15
7	0.0491654	0.0491654	-15
8	0.0391003	0.0391003	-15
9	0.0307413	0.0307413	-16
10	0.0239277	0.0239277	-15
15	0.00608121	0.00608121	-15
20	0.00134336	0.00134336	-15
50	3.80292e-08	3.80292e-08	-14
100	1.10819e-16	1.10819e-16	-15
1000	4.45825e-194	4.45825e-194	-14

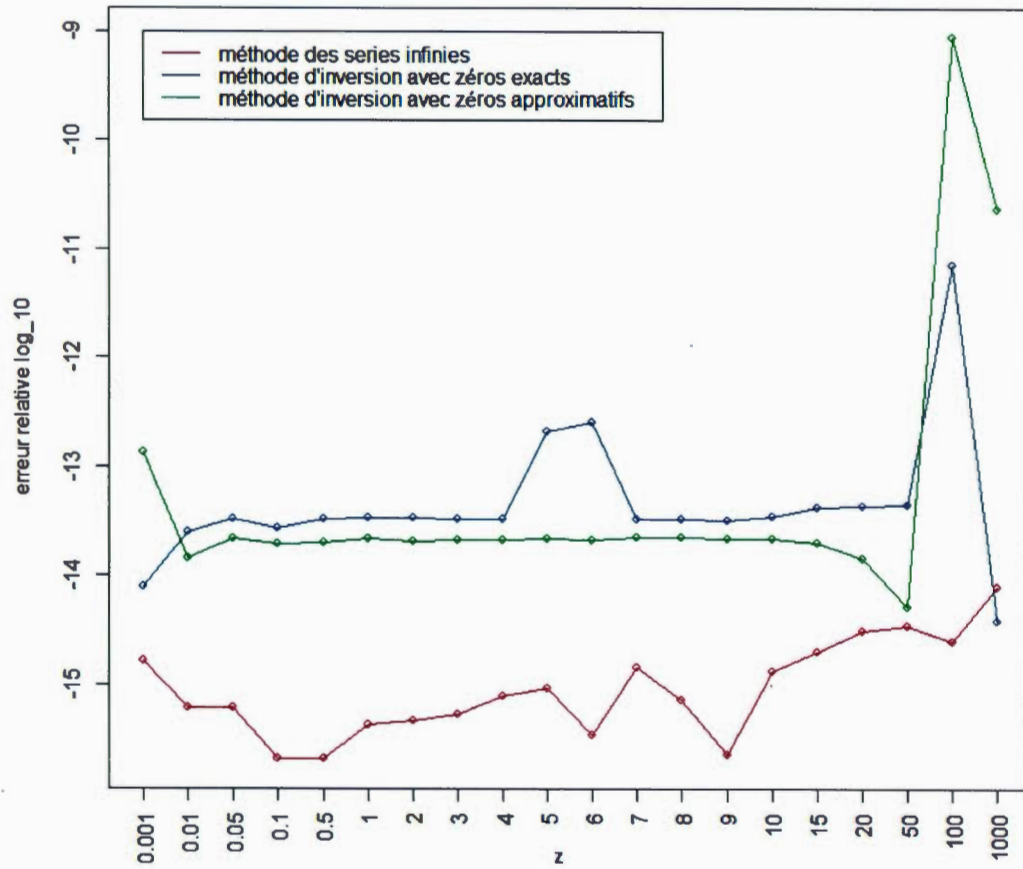


Figure 3.5 L'erreur relative \log_{10} de la densité de Tweedie approximée par la méthode des séries infinies, la méthode 3 d'inversion de Fourier, avec des zéros exacts et approximatifs, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

3.3 L'approximation de la densité Tweedie par la méthode de point-selle

La méthode de point-selle peut être utilisée pour approximer la densité de Tweedie.

En utilisant la formule (2.16)

$$f_Z(z, \mu, \phi) = b(z, \phi) \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\},$$

Proposition 3.3.1. *La densité de Tweedie sous l'approximation de point-selle s'écrit comme (Jorgensen, 1997)*

$$\begin{aligned} f_Z(z, \mu, \phi) &= [2\pi\phi z^p]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\} \{1 + O(\phi)^7\}, \quad \text{pour } \phi \rightarrow 0 \\ &\simeq [2\pi\phi z^p]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\}. \end{aligned}$$

où $d(z, \mu)$ est la déviance unitaire.

Nous remarquons que la partie de la densité dans l'équation (2.16) qui ne peut pas s'écrire sous une forme fermée ($b(z, \phi)$) est remplacée par une expression analytique simple. Cette expression analytique simple est facile à évaluer pour toutes les valeurs des paramètres donnés.

Preuve. (Jorgensen, 1992)

Par le théorème d'inversion de Fourier 3.1.1, la fonction de densité de Z s'écrit

$$f_Z(z, \mu, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_Z(it) e^{-itz} dt, \quad (3.19)$$

où i est l'unité imaginaire et $M_Z(\cdot)$ est la fonction génératrice des moments du modèle de dispersion exponentiel, qui s'écrit

$$M_Z(t) = \exp \left[\frac{1}{\phi} \{ \kappa(\theta + t\phi) - \kappa(\theta) \} \right].$$

7. On dit qu'une fonction f est au plus de l'ordre de la fonction g dans un voisinage de x_0 , que l'on note $f(x) = O[g(x)]$, pour $x \rightarrow x_0$, lorsque la limite de f/g existe et est finie.

Nous remplaçons cette expression dans la formule de la fonction de densité de Z (3.19), et nous posons $s = t\phi$. Nous trouvons alors

$$f(z, \mu, \phi) = \frac{1}{2\pi\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{\phi} \{ \kappa(\theta + is) - \kappa(\theta) - isz \} \right] ds. \quad (3.20)$$

Soit $\tilde{\theta}$ un point-selle⁸ de l'exposant dans l'intégrale de l'équation (3.20). Nous choisissons μ et z dans Ω , où Ω est le domaine de définition de μ , tel que $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ de telle sorte que $\theta = \tau^{-1}(\mu)$ et $\tilde{\theta} = \tau^{-1}(z)$ appartiennent à Ω .

Puisque l'intégrale est analytique, les limites de l'intégrale reste toujours $(-\infty, \infty)$ ⁹.

Par conséquent, la fonction de densité de Z devient alors

$$\begin{aligned} f(z, \mu, \phi) &= \frac{1}{2\pi\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{\phi} \{ \kappa(\theta + i[s + i(\theta - \tilde{\theta})]) - \kappa(\theta) - i[s + i(\theta - \tilde{\theta})]z \} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{\phi} \{ \kappa(\tilde{\theta} + is) - (\tilde{\theta} + is)z + \theta z - \kappa(\theta) \} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi\phi} \exp \left[\frac{1}{\phi} \{ \theta z - \kappa(\theta) \} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{\phi} \{ \kappa(\tilde{\theta} + is) - (\tilde{\theta} + is)z \} \right] ds. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le développement de Taylor de l'exposant dans l'intégrale de la formule (3.21), autour de $\tilde{\theta}$, donne

$$\begin{aligned} \kappa(\tilde{\theta} + is) - (\tilde{\theta} + is)z &\simeq \kappa(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta}z + \frac{1}{2}(is)^2\kappa''(\tilde{\theta}) \\ &= \kappa(\tilde{\theta}) - \tilde{\theta}z - \frac{1}{2}s^2V(z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

En substituant cette approximation dans l'équation (3.21), et en utilisant la définition de la déviance unitaire dans la formule (1.16), nous obtenons

$$f(z, \mu, \phi) = \frac{1}{2\pi\phi} \exp \left[-\frac{1}{2\phi} d(z, \mu) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2\phi} \{ s^2 V(z) \} \right] ds. \quad (3.23)$$

8. Un point-selle est un point commun à deux ensembles. Il correspond au minimum du premier ensemble et au maximum du second. Le terme de point-selle vient de sa forme, qui prend l'allure d'une selle, sur un graphique.

9. Nous pouvons déplacer les limites de l'intégrale de $(-\infty, \infty)$ à $i(\theta - \tilde{\theta}) + (-\infty, \infty)$.

À partir du résultat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\phi} V(z) s^2 \right\} ds = \sqrt{\frac{2\pi\phi}{V(z)}},$$

nous obtenons l'approximation de la densité de Z

$$\begin{aligned} f(z, \mu, \phi) &\simeq \frac{1}{2\pi\phi} \exp \left\{ -\frac{1}{2\phi} d(z, \mu) \right\} \sqrt{\frac{2\pi\phi}{V(z)}} \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi\phi V(z)} \right\}^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} d(z, \mu) \right\}, \end{aligned}$$

qui est le terme principal de l'approximation de point-selle. □

L'approximation de point-selle ne se définit pas à zéro pour les fonctions de variance. Nelder et Pregibon(1987) suggèrent d'utiliser $V(z + 1/6)$ à la place de $V(z)$ pour permettre une évaluation à $z = 0$. L'algorithme de cette méthode est donné par

Algorithme 5 Méthode de point-selle.

1. Si $z = 0$,
 2. Alors $f_Z(z) = \exp(-\lambda)$,
avec $\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}$,
 3. Si $z > 0$,
 4. Alors $f_Z(z) = (2\pi\phi z^p)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{d(z, \mu)}{2\phi} \right\}$,
avec $d(z, \mu) = \frac{[\max(0, z)]^{(2-p)}}{(1-p)(2-p)} - z \frac{\mu^{(1-p)}}{(1-p)} + \frac{\mu^{(2-p)}}{2-p}$.
-

Tableau 3.5 Comparaison entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode de point-selle, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

z	dens.Bessel	approx.point-selle	erreur relative
0.001	0.135335	0.155139	0.146331
0.01	0.135335	0.170266	0.258109
0.05	0.135321	0.183369	0.355067
0.1	0.13528	0.184199	0.361613
0.5	0.134039	0.165762	0.236676
1	0.130567	0.152419	0.167355
2	0.119232	0.133057	0.115953
3	0.104744	0.114644	0.0945185
4	0.0893754	0.0967283	0.0822695
5	0.0745335	0.0800546	0.074075
6	0.0610078	0.0651605	0.068069
7	0.0491654	0.0522827	0.0634034
8	0.0391003	0.0414319	0.059632
9	0.0307413	0.032478	0.0564943
10	0.0239277	0.0252156	0.0538265
15	0.00608121	0.00635273	0.0446497
20	0.00134336	0.00139583	0.0390608
50	3.80292e-08	3.89928e-08	0.0253379
100	1.10819e-16	1.12831e-16	0.0181546
1000	4.45825e-194	4.48441e-194	0.00586897

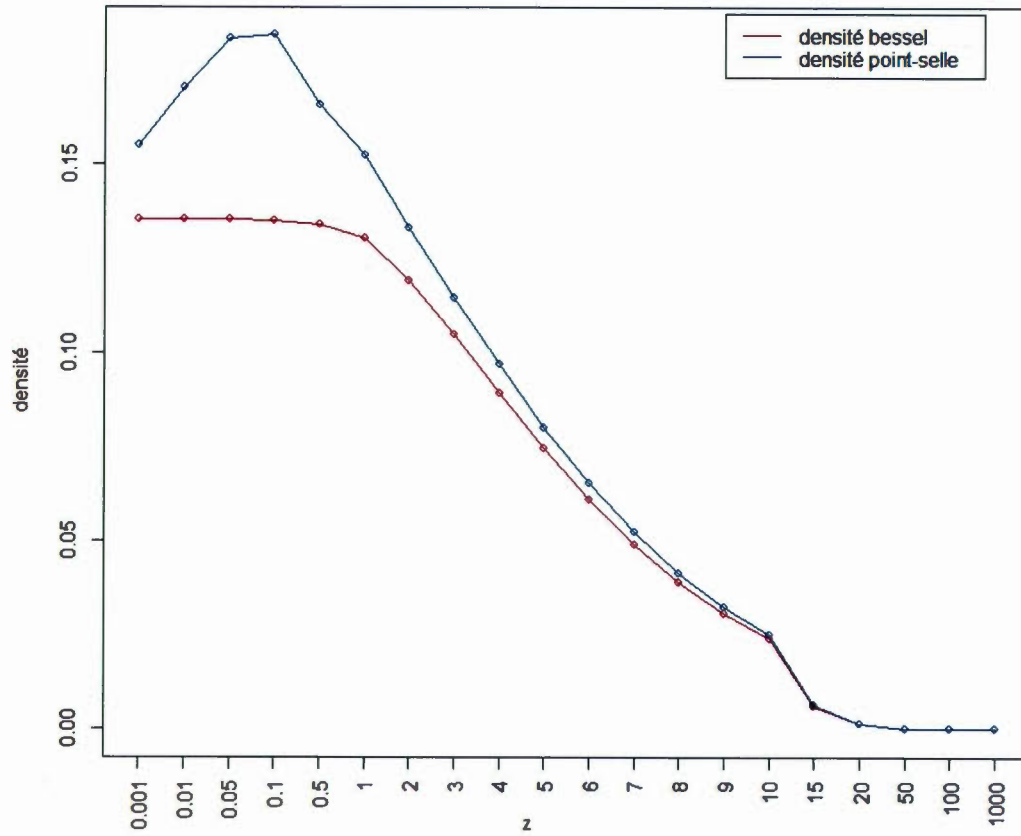


Figure 3.6 Graphique montrant la différence entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode de point-selle, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

Le tableau 3.5 montre que la densité approximée par la méthode de point-selle comparativement à la vraie densité $\chi_0^2(\mu)$, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$, ne donne pas une approximation avec une bonne précision, surtout pour les petites valeurs de z . Nous trouvons, par exemple, l'erreur relative égale à 0.36, pour $z = 4$, ce qui signifie que la précision est mauvaise. La figure 3.6 nous confirme que la méthode de point-selle est une mauvaise approximation de la densité Tweedie.

3.3.1 La précision de la méthode de point-selle

Afin d'améliorer la méthode de point-selle et la rendre plus précise, Smyth et Verbyla (1999) ont suggéré de travailler avec le rapport

$$\frac{\phi V(z_i)}{(z_i - l)^2},$$

où l est la limite pour une observation z_i . Dans le cas du modèle Poisson-Gamma, la seule limite est à zéro, donc $l = 0$, par conséquent, le rapport se réduit à

$$\frac{\phi V(z)}{(z)^2} = \phi z^{p-2}.$$

Les auteurs ont supposé que l'approximation de point-selle est satisfaisante, si ce rapport est inférieur à 1/3, voir (Smyth et Verbyla, 1999) pour plus de détails. Par la suite, Dunn et Smyth (2001) ont proposé une mesure de précision pour la méthode de point-selle, afin d'exprimer la densité de la distribution Tweedie en fonction de cette mesure de précision. À cet effet, considérons la transformation $Y = cZ$, vue dans la section 3.1, avec $c > 0$, où Z suit une distribution Tweedie avec une moyenne μ et fonction de variance $V(\mu) = \mu^p$. Comme nous l'avons déjà vu dans la sous-section 3.1.1, si Z est d'une distribution Tweedie particulière et c est une constante, alors cZ est également de la même distribution Tweedie.

Pour écrire la densité de Tweedie, sous l'approximation de point-selle, en fonction de la mesure de précision, nous utilisons la formule de densité en termes de

déviance de l'équation (2.16), pour $c = 1/z$

$$\begin{aligned}
 f_Z(z, \mu, \phi) &= cf_Y(cz, c\mu, c^{2-p}\phi) = c b(cz, c^{2-p}\phi) \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\} \\
 &= \frac{1}{z} b(1, z^{p-2}\phi) \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\} \\
 &= \frac{1}{z} b(1, \xi) \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\}. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

où $\xi = z^{p-2}\phi$, qui est égal au ratio utilisé par Smyth et Verbyla (1999). Dans la pratique, nous utilisons $\xi' = 1/(1 + \xi)$ à la place de ξ car il est plus facile de travailler avec ξ' qu'avec ξ , puisque $0 < \xi' < 1$ alors que $0 < \xi < \infty$ est illimité. Donc, approximer la densité de la distribution Tweedie, dans ce cas, revient à approximer $b(1, \xi)$. Ainsi, l'approximation de point-selle de la distribution Tweedie peut être écrite comme

$$f_Z(z, \mu, \phi) \approx \frac{1}{z} (2\pi\xi)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\phi} d(z, \mu) \right\}. \tag{3.25}$$

Soit ρ une mesure de précision de l'approximation de point-selle de la densité $b(1, \xi)$, qui peut s'exprimer en fonction de ξ , comme suit

$$\rho = b(1, \xi) \sqrt{2\pi\xi}. \tag{3.26}$$

Des équations (3.24) et (3.25), nous constatons que $b(1, \xi) \approx (2\pi\xi)^{-1/2}$ pour tout z , donc lorsque ϕ tend vers 0, ρ tend vers 1 lorsque ξ tend vers 0 et l'erreur relative de l'approximation de point-selle, dans ce cas, est donnée par $(\rho - 1)/\rho$ (Dunn et Smyth, 2001).

D'autre part, la méthode d'inversion de Fourier (Dunn et Smyth, 2008) ou la méthode de développement en séries infinies (Dunn et Smyth, 2005) peuvent être utilisées pour calculer le ratio ρ , à partir de la formule

$$\rho = b_p(1, \xi) \sqrt{2\pi\xi}. \tag{3.27}$$

3.3.2 L'approximation de la densité de Tweedie par la méthode d'interpolation

La connaissance de ρ permettrait une évaluation précise de la densité Tweedie. [Dunn et Smyth \(2001\)](#) ont appelé l'approximation de point-selle, en fonction de la précision ρ , la méthode d'interpolation, et elle se base sur l'interpolation polynomiale des nœuds du polynôme de Tchebychev. De l'équation (3.26), nous avons

$$b(1, \xi) = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\xi}}.$$

En substituant $b(1, \xi)$ dans l'équation (3.24), la densité sera calculée par la formule

$$f_Z(z, \mu, \phi) = \frac{1}{z} \frac{\rho}{\sqrt{2\pi\xi}} \exp \left\{ \frac{-d(z, \mu)}{2\phi} \right\}. \quad (3.28)$$

En utilisant les méthodes précédentes : méthode d'inversion de Fourier ou bien la méthode des séries infinies, nous pouvons tracer ρ en fonction de ξ' , pour différentes valeurs de p . La figure 3.7 montre que ρ est une fonction monotone de ξ' pour la majorité des valeurs de p , sauf pour p proche de 1. Selon la nature de ces courbes ($p \rightarrow 1$), [Dunn et Smyth \(2001\)](#) ont trouvé utile d'utiliser une interpolation polynomiale, afin d'obtenir la précision ρ .

Pour utiliser un polynôme d'interpolation, il est nécessaire que certaines valeurs de la fonction ρ soient disponibles. Puisque les méthodes précédentes permettent de calculer ρ pour toutes les valeurs des paramètres, cela signifie que tous les points peuvent être choisis pour une interpolation polynomiale.

De la formule (3.28), nous constatons que le calcul de la densité se base sur le calcul de la fonction ρ qui est déterminé à partir de p et ξ , c'est-à-dire que ρ dépend de deux paramètres. Donc, l'interpolation est nécessaire dans la dimension p ainsi que dans la dimension ξ .

Pour interpoler, nous devons déterminer le nombre de nœuds dans la dimension

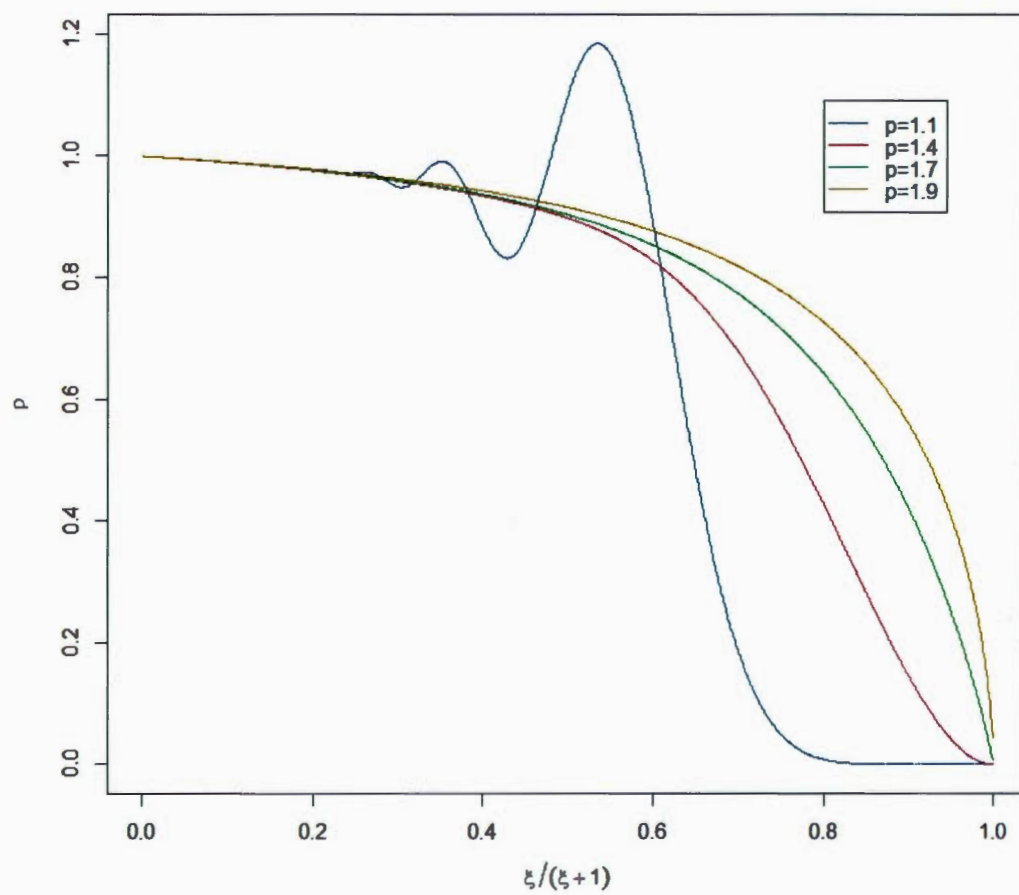


Figure 3.7 Précision ρ en fonction de ξ' , pour $p = 1.1$, $p = 1.4$, $p = 1.7$ et $p = 1.9$.

p ainsi que dans la dimension ξ , ce qui permet de déterminer les grilles de points d'interpolation dans chaque dimension.

Après plusieurs expériences, les auteurs ont trouvé utile de diviser l'espace des paramètres en plusieurs parties. Pour chaque partie, nous avons $p_{inf}, p_{sup}, \xi'_{inf}$ et ξ'_{sup} . Dunn (2007) a choisi, pour chaque partie de l'espace des paramètres, 15 nœuds dans la dimension p , soit $n = 15$ et 25 dans la dimension ξ , soit $m = 25$ et il a trouvé que l'augmentation du nombre de nœuds dans la dimension p a eu peu d'impact sur la précision comparativement au nombre de nœuds dans la dimension ξ (Dunn, 2001).

Dunn et Smyth (2001) ont utilisé les nœuds de Tchebychev dans l'interpolation polynomiale. Comme cela a été vu dans la section 1.3, l'erreur des polynômes de Tchebychev est uniforme sur l'intervalle d'approximation qui est ici $[0,1]$, donc, l'utilisation des nœuds de Tchebychev garantit que l'erreur maximale dans l'intervalle $[0, 1]$ sera la plus petite possible pour l'interpolation polynomiale. Comme les nœuds de Tchebychev sont définis sur $[-1, 1]$, nous devons effectuer un changement de variable en utilisant la formule (1.3) pour pouvoir les obtenir sur l'intervalle d'approximation qui est $[0, 1]$. Nous obtenons les grilles des valeurs de p et ξ à partir des nœuds de Tchebychev dans la formule (1.3), ensuite nous utilisons ces points et la valeur de la fonction ρ appropriée à ces points, calculée à partir des méthodes précédentes (méthode d'inversion de Fourier ou bien la méthode des séries infinies), pour calculer les différences divisées. Cette méthode dépend donc des deux autres méthodes.

Les différences divisées, de l'équation (1.6), garantissent l'évaluation des polynômes d'interpolation aux nœuds choisis. Dans notre cas, elles sont calculées alors à partir des racines du polynôme de Tchebychev, dans la dimension p ainsi que la dimension ξ' et la valeur de la fonction ρ à ces nœuds. Nous pouvons voir les

différences divisées comme les coefficients des x_k , pour $k = 0, 1, \dots$, dans le polynôme de Newton qui est donné par la formule (1.4), utilisées pour interpoler les points $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k))$. Dunn (2007) a stocké ces différences divisées sur une grille bidimensionnelle de $n_p \times n_{\xi'}$ valeurs, où n_p et $n_{\xi'}$ sont les nombres de nœuds dans la dimension p et ξ' respectivement. Puisque le calcul de ces différences divisées dépend des autres méthodes d'approximation, alors c'est mieux de les calculer une seule fois puis de les stocker, pour ne pas refaire le travail à chaque fois. Les différences divisées peuvent être calculées à partir de l'algorithme suivant

Algorithme 6 Calcul des différences divisées

1. Pour $j = 1$ à n , (n représente le nombre de nœuds)
 2. Pour $i = n + 1$ à $j + 1$,

$$f[i] = \frac{f[i] - f[i - 1]}{x_i - x_{i-j}}, \text{ avec } f[0] = f(0), f[1] = f(1), \dots$$
-

L'interpolation bidimensionnelle, adoptée par Dunn et Smyth (2001), consiste à fixer l'une des deux variables, par exemple ξ' et à utiliser l'interpolation unidimensionnelle pour interpoler sur l'autre variable qui est, dans ce cas, p . Ensuite, nous utilisons une interpolation unidimensionnelle sur l'autre variable qui est ξ' , comme le montre l'algorithme 7. En d'autres termes, nous calculons ρ en interpolant sur p pour chaque ξ' donné, et une fois que ces valeurs de ρ ont été calculées, elles nous servent comme des différences divisées pour interpoler sur l'autre variable qui est ξ' , afin de trouver la valeur de ρ nécessaire pour calculer la densité. Une fois que les valeurs de ρ sont trouvées, la densité peut être calculée en utilisant l'équation (3.28).

Tableau 3.6 La différence entre la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$ et la densité de Tweedie approximée par la méthode d'interpolation, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

z	Bessel	interpolation	erreur relative \log_{10}
0.001	0.135335	0.001	-0.003
0.01	0.135335	0.01	-0.03
0.05	0.135321	0.05	-0.2
0.1	0.13528	0.1	-0.6
0.5	0.134039	0.134039	-11
1	0.130567	0.130567	-11
2	0.119232	0.119232	-11
3	0.104744	0.104744	-11
4	0.0893754	0.0893754	-11
5	0.0745335	0.0745335	-14
6	0.0610078	0.0610078	-11
7	0.0491654	0.0491654	-11
8	0.0391003	0.0391003	-11
9	0.0307413	0.0307413	-11
10	0.0239277	0.0239277	-11
15	0.00608121	0.00608121	-11
20	0.00134336	0.00134336	-11
50	3.80292e-08	3.80292e-08	-12
100	1.10819e-16	1.10819e-16	-12
1000	4.45825e-194	4.45825e-194	-12

Algorithme 7 Méthode d'interpolation.

1. Si $z = 0$, alors $f_Z(z) = \exp(-\lambda)$, avec $\lambda = \frac{\mu^{2-p}}{\phi(2-p)}$.
 2. Si $z > 0$, alors $f_Z(z) = \frac{\rho}{z\sqrt{2\pi\xi}} \exp\left\{\frac{-d(z,\mu)}{2\phi}\right\}$, avec $\xi = \phi z^{(2-p)}$,

$$d(z,\mu) = \frac{z^{(2-p)}}{(1-p)(2-p)} - z \frac{\mu^{(1-p)}}{(1-p)} + \frac{\mu^{(2-p)}}{2-p},$$
 3. Poser $\xi' = \xi/(1+\xi)$.
 (selon les valeurs de ξ' obtenues, les auteurs ont divisé l'espace des paramètres en plusieurs parties, pour chaque partie, nous avons $p_{inf}, p_{sup}, \xi'_{inf}$ et ξ'_{sup})
 4. Si $p \in [p_{inf}, p_{sup}]$ et si $\xi' \in [\xi'_{inf}, \xi'_{sup}]$
 5. Poser $n = 15$ (la grille de points pour p)
 6. Pour $k = 0, 1, \dots, n$,

$$p_k = \frac{p_{inf}+p_{sup}}{2} + \frac{p_{sup}-p_{inf}}{2} \cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right],$$
 pour $p_k \in [p_{inf}, p_{sup}]$, (les nœuds de Tchebychev, dans la dimension p),
 7. Poser $m = 25$ (la grille de points pour ξ').
 8. Pour $j = 0, 1, \dots, m$,

$$\xi'_j = \frac{\xi'_{inf}+\xi'_{sup}}{2} + \frac{\xi'_{sup}-\xi'_{inf}}{2} \cos\left[\frac{(2j+1)\pi}{2m+2}\right],$$
 pour $\xi'_j \in [\xi'_{inf}, \xi'_{sup}]$, (les nœuds de Tchebychev, dans la dimension ξ'),
 9. Pour $j = 1$ à $m+1$, (interpolation)
 10. Poser $\rho'_j = f[j, n+1]$, (les différences divisées sont calculées sur une grille bidimensionnelle de $(n+1) \times (m+1)$ valeurs)
 11. Pour $k = n$ à 1, (interpolation sur la variable p , pour chaque valeur de ξ')

$$\rho'_j = \rho'_j(p - p_k) + f[j, k]$$
 12. Poser $\rho = \rho'_{m+1}$
 13. Pour $i = m$ à 1 (interpolation sur la variable ξ')

$$\rho = \rho(\xi' - \xi'_i) + \rho'_i$$
-

Le tableau 3.6 représente l'approximation de la densité Tweedie par la méthode d'interpolation, et le logarithme décimal de l'erreur relative produite par rapport à la densité exacte $\chi_0^2(\mu)$, pour $\mu = 4$, $p = 1.5$ et $\phi = 2$.

À partir du tableau 3.6, nous observons que la méthode d'interpolation ne fonctionne pas pour les petites valeurs de z (0.001, 0.01, 0.05, 0.1). L'approximation de la densité devient précise à partir de $z = 0.5$. Donc, la méthode d'interpolation ne peut être utilisée pour calculer la densité pour les petites valeurs de z .

D'autre part, la précision ne peut pas être obtenue pour toutes les valeurs des paramètres, car la méthode d'interpolation ne fonctionne pas pour les petites valeurs de p , plus précisément, lorsque $p \rightarrow 1$, tel que vu sur la figure 3.7. Dans ce cas, ρ n'est pas une fonction monotone de p et n'est pas une fonction polynomiale. La méthode d'interpolation ne fonctionne pas également lorsque $\xi/(1 + \xi) \rightarrow 1$, c'est-à-dire lorsque $\xi \rightarrow \infty$, comme le montre la figure 3.7, la fonction ρ , dans ce cas, décroît très rapidement de façon exponentielle, ainsi ρ n'est pas une fonction polynomiale. Donc, l'interpolation ne peut pas être utilisée pour toutes les valeurs de p ainsi que pour toutes les valeurs de ξ .

Pour ces raisons, Dunn (2007) a combiné entre la méthode d'interpolation et la méthode de développement en séries infinies dans le package Tweedie. Il a utilisé la méthode de développement en séries infinies pour les parties de l'espace des paramètres où la méthode d'interpolation ne fonctionne pas, afin d'obtenir une bonne précision de la densité pour toutes les valeurs de p ainsi que pour toutes les valeurs de ξ . Il a trouvé que la méthode combinée calcule généralement la densité beaucoup plus rapidement que la méthode de développement en séries infinies ou l'inversion de Fourier seule. Lorsque ξ est inférieure à 0,01, il est préférable d'utiliser la méthode d'inversion à la place de la méthode de développement en séries infinies.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS EN ASSURANCE

L'utilisation des distributions Tweedie dans la modélisation des réclamations d'assurance est particulièrement intéressante. Les méthodes vues au chapitre 3 permettent une estimation efficace des paramètres p et ϕ , en utilisant la fonction de vraisemblance, ainsi qu'une vérification de l'adéquation du modèle. Toutefois, comme la distribution Tweedie fait partie des distributions de la famille exponentielle, nous savons que $\hat{\mu} = \overline{X}$ par l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE). Dans ce chapitre, nous effectuons une application en assurance à l'aide d'une base de données qui représente les coûts totaux individuels d'assurance automobile. Nous utilisons également la densité de Tweedie estimée pour calculer la transformée d'Esscher.

(Dunn, 2004), (Hasan et Dunn, 2011), (Hasan et Dunn, 2010), (Hasan et Dunn, 2015) ont utilisé des distributions de la famille Tweedie pour modéliser l'apparition et la quantité de précipitations. Ils ont trouvé que le modèle Tweedie ajuste bien les précipitations de pluie. Notre application, dans ce chapitre, est inspirée de ces articles.

4.1 Contexte et données

Les données utilisées dans cet exemple sont formées de 753 828 observations qui représentent des données d'assurance individuelle, pour les années 2003, 2004, 2005, 2006 et 2007, où nous pouvons observer des contrats d'assurances. Parmi ces observations, il y a 703 075 observations (ou 92.05%) qui ont une réponse zéro. Ces zéros exacts représentent l'absence d'accident ou de remboursement par véhicule assuré pour une année.

Le tableau 4.1 représente les différentes statistiques : moyenne, médiane, coefficient de variation (CV), asymétrie, 95^{ème} percentile et 99^{ème} percentile, pour l'ensemble de données.

Tableau 4.1 Statistiques sur les coûts totaux individuels d'assurance.

moyenne	médiane	CV	0%	asymétrie	95%	99%
529.67	0	1916.436	92.05	128.38	1598.20	9118.18

La figure 4.1 illustre la répartition des observations en fonction des coûts. Nous remarquons une grande masse de probabilité à 0, étant donné que la majorité des observations sont des zéros.

4.2 Analyse empirique

Nous effectuons plusieurs permutations aléatoires des observations. À chaque permutation, nous répartissons les observations en 760 échantillons de 1000 observations. La figure 4.2 illustre la relation log-variance échantillonnale et log-moyenne échantillonnale. Les parcelles sont presque linéaires, pour toutes les permutations, ce qui suggère que la variance est proportionnelle à une certaine puissance de la moyenne ; c'est-à-dire $V(Z) = \phi\mu^p$, donc, la distribution Tweedie est suggérée dans ce cas.

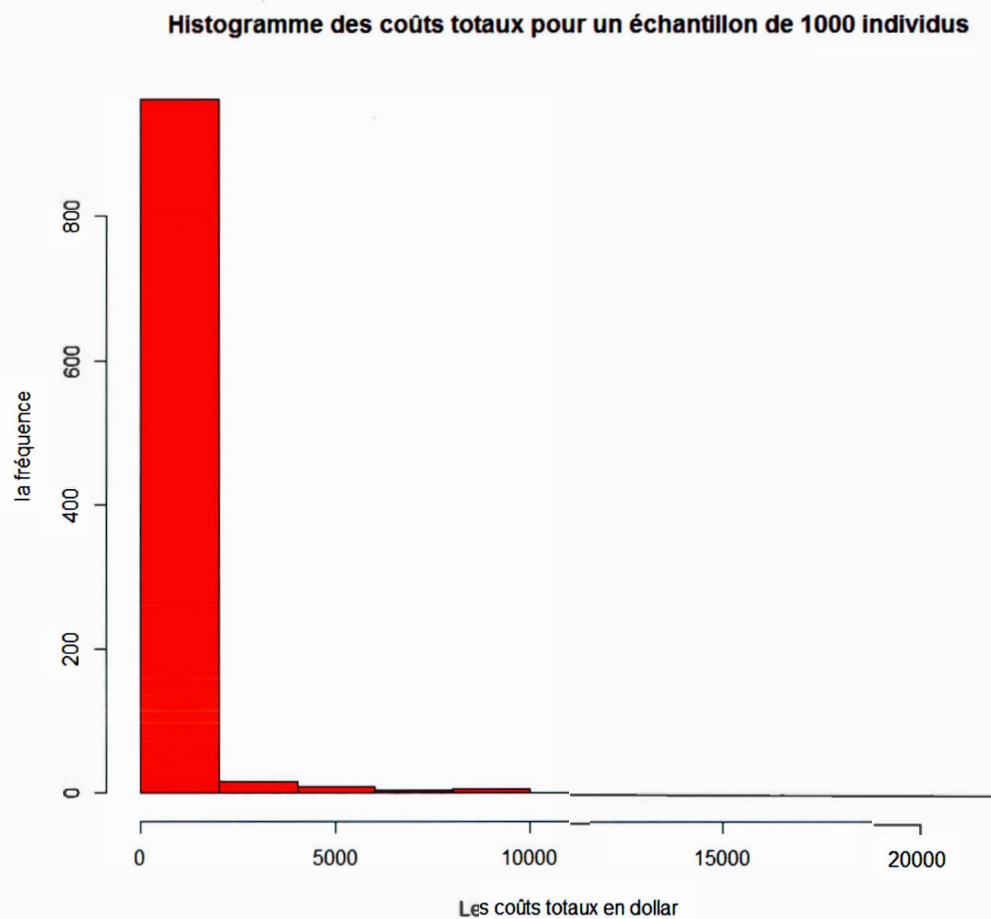


Figure 4.1 Histogramme des coûts totaux individuels d'assurance pour un échantillon de 1000 observations.

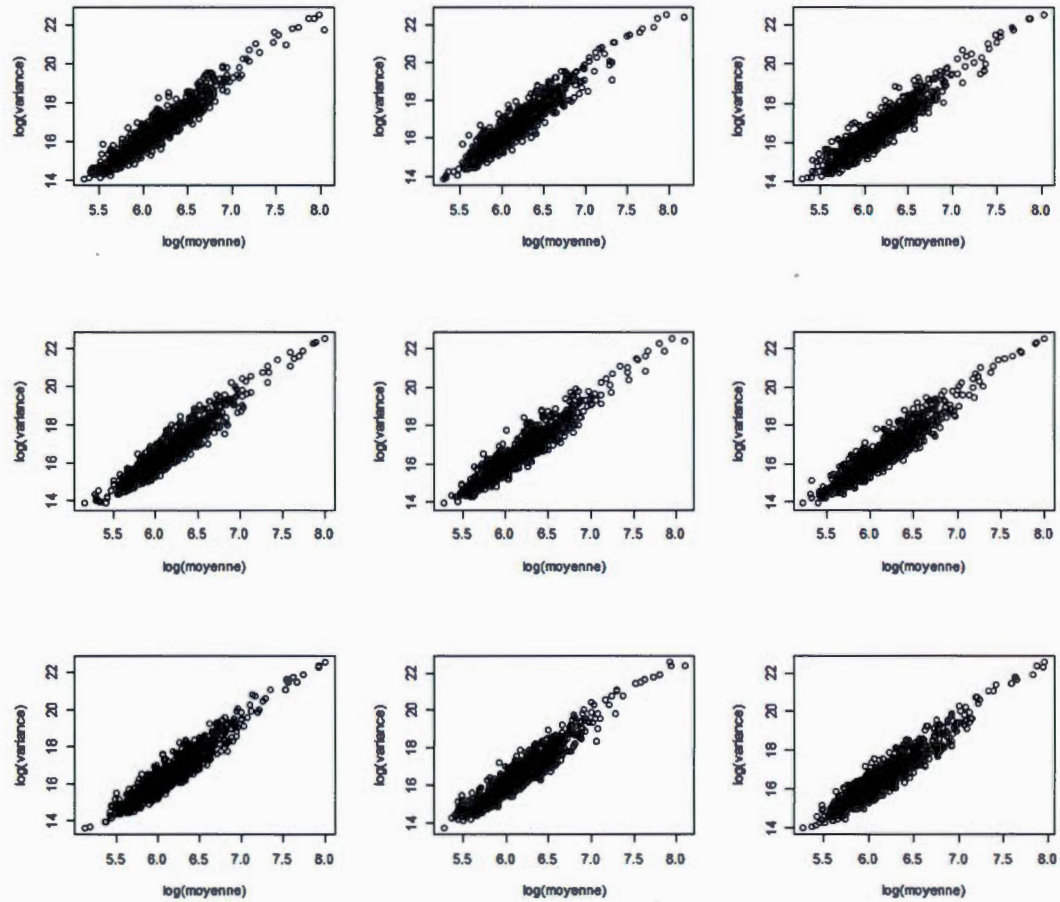


Figure 4.2 Graphiques qui montrent la relation moyenne-variance pour plusieurs permutations.

Dans ce cas, les coûts peuvent être exprimés comme suit

$$Z = \begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_i, & \text{pour } N > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où Z est le total des réclamations, N représente le nombre de réclamations et Y_i représente le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre ou réclamation. Les données sont continues avec des zéros exacts, cela signifie que la distribution mixte Poisson-Gamma peut être utilisée pour modéliser les coûts totaux d'assurance individuels.

4.3 Ajustement de la distribution Poisson-Gamma

Afin d'ajuster le modèle Poisson-Gamma aux données, nous devons estimer les paramètres inconnus. Nous avons trois paramètres à estimer, la moyenne μ , le paramètre de dispersion ϕ et l'indice de la distribution p .

Pour simplifier les calculs, nous ignorons la variabilité d'échantillonnage dans les paramètres estimés, et nous supposons aussi que les observations z_i sont indépendantes.

Comme la densité du modèle Poisson-Gamma est approximée avec précision par les méthodes vues précédemment, nous pouvons utiliser cette densité approximée par l'une de ces méthodes pour calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres inconnus dans le modèle.

La fonction `tweedie.profile`, dans R ([Dunn, 2013](#)), donne une estimation des paramètres ϕ et p utilisant la fonction de log-vraisemblance de la densité Tweedie. La fonction de log-vraisemblance est calculée par l'une des méthodes suivantes : la méthode d'inversion de Fourier, la méthode des séries infinies, la méthode d'interpolation et la méthode de point-selle, vues au chapitre 3. Elle utilise par défaut la méthode d'inversion de Fourier.

La fonction de log-vraisemblance pour estimer les paramètres du modèle est donnée par

$$\log L = \sum_{i=1}^n \log f(z_i; \mu_i, \phi).$$

Pour différentes valeurs de p , nous estimons ϕ par la méthode du maximum de vraisemblance. À partir de l'estimation de ϕ , nous pouvons obtenir une estimation précise de p en utilisant une fonction profil de vraisemblance (Smyth, 1996). Nous calculons la fonction de log-vraisemblance pour les valeurs de ϕ estimées. Les paramètres p et ϕ pour lesquels la log-vraisemblance est un maximum sont choisis.

4.4 Adéquation du modèle

Pour illustration, nous utilisons un échantillon aléatoire de 1000 observations, l'estimateur du maximum de vraisemblance de ϕ pour le modèle ajusté est $\hat{\phi} = 262.18$ et l'estimateur du maximum de vraisemblance de p est $\hat{p} = 1.64$. Le fait que $-2 \log L$ soit asymptotiquement de loi χ_1^2 (Krzanowski, 1998) peut nous aider à construire un intervalle de confiance pour p . Pour cet échantillon, l'intervalle de confiance à 95% de p est donné par $IC = (1.59, 1.69)$ qui est calculé par la fonction `tweedie.profile` dans R. La figure 4.3 illustre la fonction de log-vraisemblance profil en fonction de p , elle nous permet de voir la valeur de p qui maximise la log-vraisemblance.

4.4.1 Étude des résidus quantiles du modèle ajusté

Afin de juger l'adéquation du modèle Tweedie ajusté, nous étudions les résidus de ce modèle. Dunn et Smyth (1996) ont trouvé utile de calculer les résidus quantiles pour vérifier l'adéquation du modèle Tweedie. À cet effet, les résidus quantiles sont définis comme suit

$$r_{q,i} = \Phi^{-1} \left\{ F(z_i; \hat{\mu}_i, \hat{\phi}) \right\}, \quad (4.1)$$

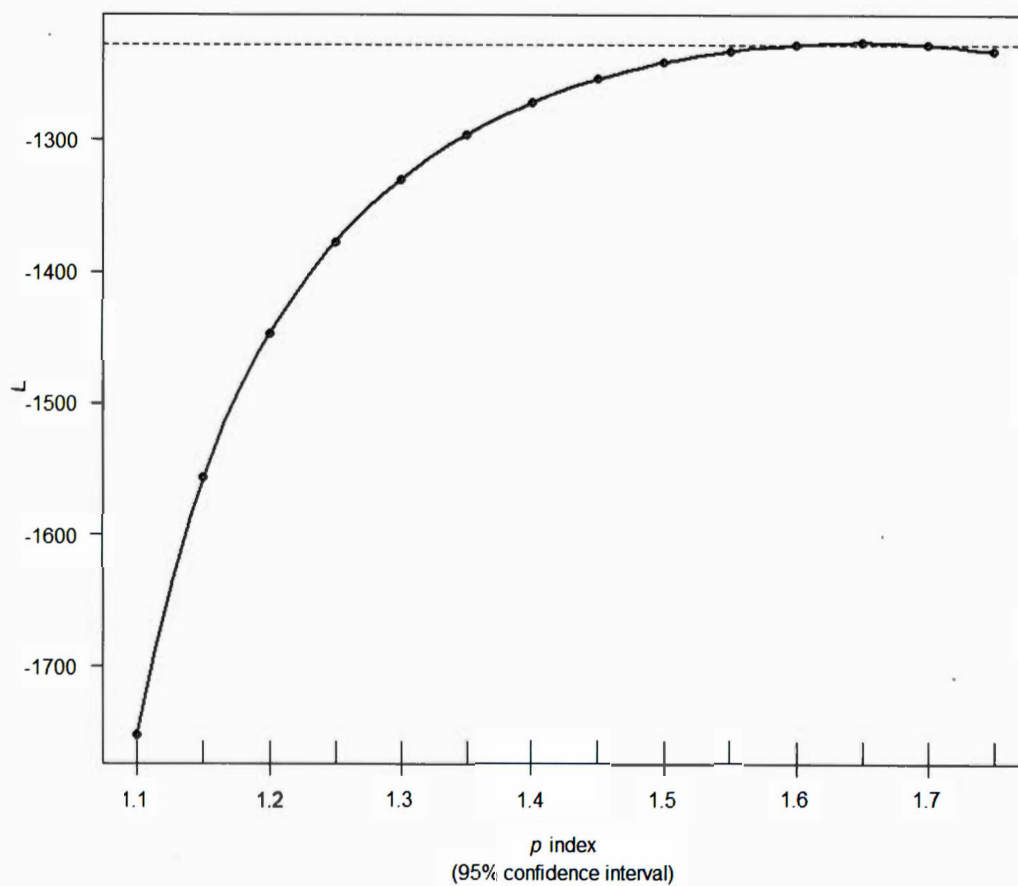


Figure 4.3 La fonction de log-vraisemblance profil pour les réclamations individuelles d'assurance. L'estimation du maximum de vraisemblance de p pour un échantillon de 1000 observations est de 1.64, avec un intervalle de confiance à 95 % qui est [1.59 , 1.69].

où F est la fonction de répartition d'une distribution continue quelconque et Φ est la fonction de répartition cumulative de la distribution normale standard. L'hypothèse de normalité des résidus inclut les distributions appartenant aux EDM (Dunn et Smyth 1996), ce qui signifie que les résidus de la distribution Poisson-Gamma sont normalement distribués.

Dans notre cas, les résidus quantiles sont calculés en inversant la fonction de répartition ajustée de la distribution Tweedie à chaque valeur z_i , puis en trouvant le quantile normal standard équivalent.

Par ailleurs, les observations sont continues avec des zéros exacts. Dans ce cas, les résidus quantiles utilisent la randomisation¹ seulement pour les observations pour lesquelles la réponse est exactement zéro (Dunn et Smyth 1996), c'est-à-dire que la randomisation est utilisée pour produire des résidus distribués en continu.

Les résidus quantiles utilisent le minimum nécessaire de randomisation de sorte qu'aucune granularité (la plus petite valeur possible) ne reste dans la distribution des résidus (Dunn et Smyth, 1996). Dans ce cas, les résidus quantiles sont définis comme suit : soit $a_i = \lim_{z \uparrow z_i} F(z_i; \hat{\mu}_i, \hat{\phi})$ et $b_i = F(z_i; \hat{\mu}_i, \hat{\phi})$, nous avons alors

$$r_{q,i} = \Phi^{-1} \{u_i\}, \quad (4.2)$$

où u_i est une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $(a_i, b_i]$. Dans ce cas, les résidus $r_{q,i}$ sont normalement distribués.

Lorsque tous les points sont situés sur la ligne droite, cela indique un ajustement parfait, tandis que les points situés loin de la ligne indiquent un mauvais ajustement du modèle. Dans ces figures, les statistiques d'ordre de l'échantillon sont tracées en fonction de l'ordre attendu des statistiques d'ordre normal. Le tracé des

1. Les résidus quantiles utilisent des valeurs aléatoires pour les observations qui sont ici des zéros.

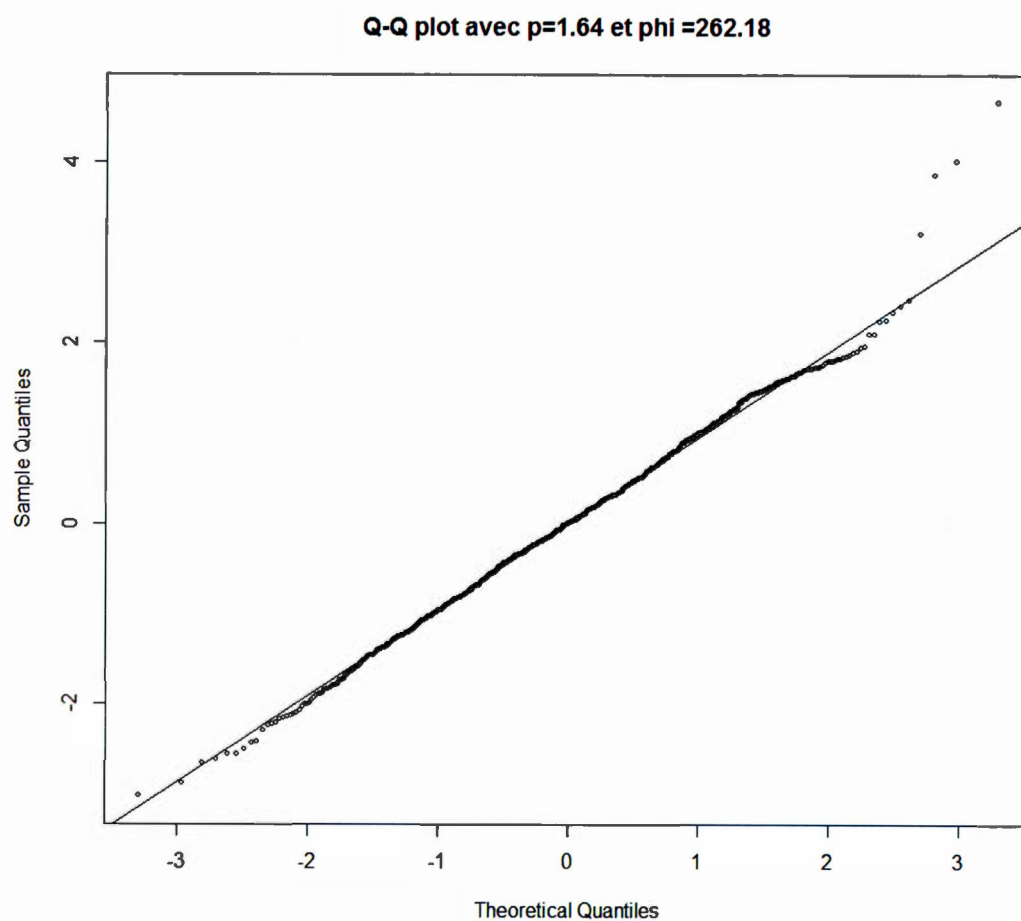


Figure 4.4 Résidus quantiles de distribution normale appliqués sur un échantillon de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance.

résidus quantiles de la distribution normale à la figure 4.4 montre que tous les résidus se trouvent sur ou à proximité de la ligne à part quatre valeurs extrêmes. Cela signifie que la distribution Poisson-Gamma avec $\hat{p} = 1.64$ ajuste bien les totaux des coûts individuels, et que le modèle suggère un ajustement adéquat des données. Les quatre points qui sont loin de la ligne peuvent représenter des sinistres graves en assurance automobile qui mériteraient des analyses plus poussées, voir Doucet (2014) pour plus de détails.

4.4.2 Étude des percentiles

Afin de tester la performance du modèle ajusté, nous pouvons vérifier si le modèle ajusté simule des données ayant des caractéristiques similaires aux données observées.

Nous estimons les paramètres de la distribution Poisson-Gamma pour un échantillon aléatoire de 1000 observations. Soit de nouveau $\hat{p} = 1.64$, $\hat{\phi} = 262.18$ et $\hat{\mu} = 536.72$. Comme le modèle est linéaire, alors la moyenne estimée $\hat{\mu}$ n'est que la moyenne de l'échantillon \overline{X} . Nous calculons la médiane, le 90^{ème} percentile, le 95^{ème} percentile et le 99^{ème} percentile, de cet échantillon, et les résultats sont donnés dans le tableau 4.2.

D'autre part, nous simulons 1000 échantillons, de taille 1000 chacun, à partir de la distribution Poisson-Gamma ajustée, avec les paramètres estimés \hat{p} , $\hat{\phi}$ et $\hat{\mu}$. Ensuite, nous calculons les percentiles simulés pour chaque échantillon : nous aurons 1000 valeurs pour chaque percentile différent. Puis, nous calculons la médiane des 1000 percentiles simulés : nous aurons une seule valeur pour chaque percentile différent.

Nous construisons des intervalles de confiance empiriques à 95%, à partir des statistiques estimées par les données simulées selon le modèle Tweedie ajusté.

Ces statistiques sont considérées comme des représentants des événements faibles, moyens et élevés des coûts totaux individuels. Les résultats de la simulation sont représentés dans le tableau 4.2.

Tableau 4.2 Comparaison entre les percentiles observés et les percentiles similaires des données simulées pour un échantillon de 1000 observations.

	médiane	90 ^{ème} percentile	95 ^{ème} percentile	99 ^{ème} percentile
Observé	0	0	1920.44	9815.80
Simulé	0	0	2467.38	14121.42

Le tableau 4.2 montre que le 90^{ème} percentile observé est nul et égal au percentile similaire des données simulées ; ceci est dû au fait que la majorité des observations sont des zéros exacts. Pour le 95^{ème} percentile, nous voyons que la valeur du percentile observé est proche de celle simulée, contrairement au 99^{ème} percentile, la valeur observée est un peu loin de la valeur simulée.

Nous estimons un intervalle de confiance empirique à 95 % pour le 95^{ème} percentile simulé afin de vérifier si le 95^{ème} percentile observé appartient à cet intervalle. Étant donné un intervalle de confiance $IC = [498.61, 7036.7]$, nous remarquons que le 95^{ème} percentile observé (1920.44) appartient à l'intervalle de confiance, ce qui indique que la distribution Poisson-Gamma simule des données avec des propriétés très similaires aux données observées.

Nous répétons le test précédent pour 100 échantillons aléatoires de taille 1000 observations chacun. Nous vérifions si les 95^{èmes} percentiles observés appartiennent aux intervalles de confiance empiriques. La figure 4.5 illustre les résultats des 95^{èmes} percentiles observés et les intervalles de confiance empiriques estimés à 95% correspondants.

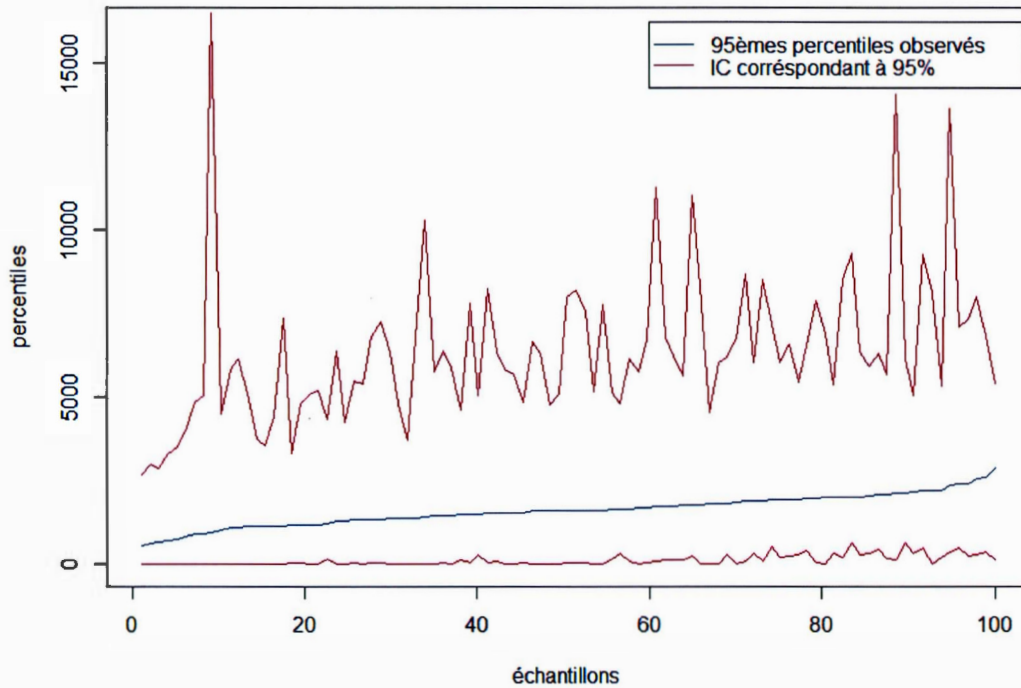


Figure 4.5 Résidus quantiles de distribution normale appliqués sur un échantillon de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance.

Nous remarquons que tous les percentiles observés se trouvent dans l'intervalle empirique correspondant. Donc, l'intervalle de confiance de 95% des statistiques simulées contient les statistiques observées respectivement à 100% des cas, ce qui signifie que le modèle est bien ajusté et que la distribution Poisson-Gamma pourrait être suggérée pour modéliser les coûts individuels d'assurance.

4.4.3 Comparaison des estimateurs obtenus par les méthodes d'approximation de la densité Tweedie

Pour comparer les paramètres estimés, \hat{p} et $\hat{\phi}$, obtenus par l'estimation du maximum de vraisemblance des quatre méthodes d'estimation de densité : inversion de Fourier, séries infinies, interpolation et point-selle, nous tirons un échantillon aléatoire de taille 1000 observations et nous estimons les paramètres par les méthodes précédentes. Le tableau 4.3 illustre les résultats de l'estimation.

Tableau 4.3 Comparaison des paramètres \hat{p} et $\hat{\phi}$, estimés par la méthode du maximum de vraisemblance pour les quatre approches : inversion de Fourier, séries infinies, interpolation et point-selle.

Estimateurs	Inversion de Fourier	Séries infinies	Interpolation	Point-selle
\hat{p}	1.678571	1.678571	1.676531	1.75
$\hat{\phi}$	288.4715	288.4715	284.4813	157.2945

Dans le tableau 4.3, nous remarquons que les estimateurs de p et de ϕ sont identiques pour la méthode d'inversion de Fourier et la méthode des séries infinies. Pour la méthode d'interpolation, l'estimateur de p change à partir du 3^{ème} chiffre après la virgule, par rapport aux 2 méthodes précédentes. L'estimateur de ϕ , par cette méthode, est plus petit de 3.9902, par rapport aux 2 méthodes précédentes. En ce qui concerne la méthode de point-selle, elle donne des estimateurs qui sont très différents par rapport aux estimateurs des autres méthodes, étant donné que la méthode de point-selle est seulement une méthode approximative qui n'estime pas la densité avec précision, comme nous l'avons déjà signalé précédemment.

4.5 Utilisation de la distribution Tweedie en assurance

4.5.1 Primes et principes de prime

La prime est un paiement chargé par un assureur qui permet aux assurés de bénéficier d'une couverture d'assurance, complète ou partielle, contre un risque financier (Keller, 2008). Les risques financiers sont considérés comme des variables aléatoires non négatives avec fonction de densité f et fonction génératrice des moments $M(t)$.

En pratique, le montant de la prime dépend de nombreux facteurs : les assureurs doivent tenir compte non seulement des caractéristiques des risques qu'ils assurent, mais aussi d'autres facteurs tels que les primes considérées par leurs concurrents.

Nous désignons par Π_X la prime chargée par l'assureur pour couvrir un risque X . Dans notre cas, la variable aléatoire X représente les réclamations individuelles d'assurance automobile.

La règle qui attribue une valeur numérique à Π_X est appelée le principe de prime, qui est de la forme $\Pi_X = \varphi(X)$, où φ est une fonction quelconque.

4.5.2 Propriétés des principes de prime

Il existe de nombreuses propriétés sur les principes de calcul des primes, parmi les propriétés de base (Dickson, 2005), (Teugels, 2004), nous trouvons

1. Marge de sécurité positive : $\Pi_X \geq E[X]$, c'est-à-dire que la prime ne doit pas être inférieure au montant espéré des réclamations.
2. Additivité : Si X_1 et X_2 sont deux risques indépendants, alors la prime pour le risque combiné est égale à la somme des deux primes individuelles, $\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$.
3. Proportionnalité : Pour toute constante $a > 0$, si $Z = aX$, alors $\Pi_Z = a\Pi_X$,

c'est-à-dire qu'en cas de changement d'échelle du montant des réclamations, cette propriété garantit à l'assureur le même niveau de bénéfice.

4. Cohérence : Si $Y = X + c$, où $c > 0$, nous aurons alors $\Pi_Y = \Pi_X + c$. Ainsi, si la distribution de Y est décalée de c unités de la distribution de X , alors la prime pour le risque Y est celle du risque X augmentée de c unités.
5. Plafonnement : Soit x_m le montant de sinistre maximal pour un risque X , nous aurons alors $\Pi_X \leq x_m$. Si cette condition n'est pas satisfaite, il n'y aurait aucune raison pour l'assuré de souscrire à la couverture d'assurance.

Les principes de calcul des primes d'assurance sont des méthodes qui autorisent une compagnie d'assurances de calculer la prime en fonction du risque X . Il existe de nombreuses méthodes différentes pour calculer les primes d'assurances, mais dans cette section nous nous concentrons sur le principe d'Esscher. Nous présentons d'abord quelques exemples importants du principe de prime, ensuite nous appliquons le principe d'Esscher sur la densité Tweedie en utilisant un échantillon aléatoire de 1000 observations des coûts totaux individuels d'assurance.

Exemple 4.5.1. Principe de la prime nette : $\Pi_X = E(X)$, la prime est égale au montant espéré des réclamations. Ce principe respecte toutes les propriétés de base, mais il n'inclut pas les marges de sécurité et ne peut donc être utilisé pour établir la prime finale.

Exemple 4.5.2. Principe de la valeur espérée : $\Pi_X = (1+\delta)E(X)$, pour $\delta > 0$. Le montant espéré des réclamations est majoré d'une marge de sécurité $\delta E(X)$. En pratique, l'inconvénient majeur de ce principe est qu'il accorde la même marge aux risques qui ont le même montant espéré. Les risques avec des moyennes identiques mais des variances différentes devraient avoir des primes différentes.

Exemple 4.5.3. Principe de la variance : $\Pi_X = E(X) + \delta Var(X)$, pour $\delta > 0$. Ce principe est différent du principe de la valeur espérée, car la marge de cette

prime est proportionnelle à la variance du risque. Cette modification permet de donner une prime différente à des risques qui n'ont pas la même variance. Comme $\delta > 0$, alors le principe de la variance a une marge non négative.

Exemple 4.5.4. Principe de l'écart-type : $\Pi_X = E(X) + \delta \sqrt{\text{Var}(X)}$, pour $\delta > 0$. La marge dans ce cas est proportionnelle à l'écart-type du risque X .

Exemple 4.5.5. Principe de l'utilité équivalente : Soit u la fonction d'utilité de l'assureur, telle que $u'(X) > 0$ et $u''(x) < 0$.

$$u(w) = E[u(w - X + \Pi_X)],$$

où w est le surplus initial de l'assureur. Ainsi, la prime de l'utilité équivalente dépendra en général du surplus de l'assureur.

Le principe de l'utilité est appelé principe exponentiel, lorsque la fonction d'utilité u est exponentielle, $u(x) = -\exp\{-\beta x\}$, avec $\beta > 0$. Dans ce cas, la prime est donnée par

$$\Pi_X = \frac{1}{\beta} \log E[\exp\{\beta X\}], \text{ pour } \beta > 0.$$

Exemple 4.5.6. Principe du risque ajusté : $\Pi_X = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]^c dx$, $0 < c < 1$, où F_X est la fonction de répartition de la variable aléatoire non négative X . Ce principe produit une pondération du risque en donnant un poids croissant aux probabilités de la queue.

4.5.3 Le principe de la prime d'Esscher

Le principe d'Esscher produit également une pondération du risque X . Il a été introduit par Bühlmann (1980) et Gerber (1980). Ce principe découle du principe de l'utilité exponentielle. Il survient lorsque l'assureur vise à optimiser son utilité selon le principe de l'utilité équivalente. La fonction d'utilité exponentielle de la prime d'Esscher est de la forme

$$u_x = \frac{1 - \exp(-cx)}{c}, \quad (4.3)$$

où c une constante supérieure à 0 qui est égale à $-\frac{d}{dx} \ln u$, et mesure l'aversion au risque² pour une compagnie d'assurance (Denuit *et al.*, 2006). La fonction d'utilité exponentielle (4.3) donne une aversion au risque constant.

Pour couvrir un risque X , la prime Π_X est déterminée en maximisant l'utilité du contrat, $E[u(\Pi_X - X)]$ sur toutes les fonctions croissantes continues w , telles que $E[w(X)] = 1$, ce qui donne

$$w(x) = \frac{\exp(cx)}{M_X(c)}, \quad (4.4)$$

le poids $w(x)$ dans l'équation (4.4) donne une prime égale à

$$E[Xw(X)] = E\left[X \frac{\exp(cX)}{M_X(c)}\right] = \int_0^{+\infty} x \frac{\exp(cx) f_X(x)}{M_X(c)} dx.$$

Par ailleurs, Goovaerts *et al.* (1984) présentent la prime d'Esscher comme la valeur attendue du risque X après avoir multiplié la densité de X par une fonction de pondération croissante, ce qui rend le risque moins attrayant pour l'assureur.

2. L'aversion au risque est l'hypothèse selon laquelle, pour un même rendement, l'investisseur rationnel choisira d'investir dans les titres qui offrent le risque le moins élevé.

Nous pouvons définir le principe d'Esscher comme une mesure de risque, qui est donnée par

$$\begin{aligned}
 \Pi_X &= \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \\
 &= \frac{\int_0^\infty xe^{hx}f(x)dx}{\int_0^\infty e^{hx}f(x)dx} \\
 &= \frac{\frac{d}{dh}M_X(h)}{M_X(h)} \\
 &= \frac{d}{dh} \log M_X(h) \\
 &= E[\tilde{X}],
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $h > 0$ et $M_X(h)$ est la fonction génératrice des moments de la variable X . Π_X est considérée ici comme la valeur espérée de la transformée d'Esscher \tilde{X} de X : c'est la prime pure de la transformée d'Esscher du risque initial X .

Dans le domaine actuariel, la transformée d'Esscher (Gerber *et al.*, 1994) est une transformation qui prend une densité de probabilité $f(x)$ et la transforme en une nouvelle densité de probabilité $g(x)$ avec un paramètre h , tel que $h > 0$. Le but de cette transformation est d'approximer la distribution du montant des réclamations globales autour d'un point d'intérêt x_0 , le paramètre h étant choisi de telle sorte que la nouvelle moyenne soit égale à x_0 . Soit $f(x)$ la densité d'une variable aléatoire non négative X , la transformée d'Esscher de $f(x)$ est donnée par la fonction $g(x)$ qui est supposée être la fonction de densité de la variable aléatoire \tilde{X} .

Soit g une fonction définie par

$$g(x) = \frac{e^{hx}f(x)}{\int_0^\infty e^{hx}f(x)dx}, \tag{4.6}$$

où $\int_0^\infty e^{hx}f(x)dx = M_X(h)$. Nous supposons que h est un nombre réel tel que la fonction génératrice des moments $M_X(h) = E[e^{hX}]$ existe.

La densité $g(x)$ est une fonction pondérée de la densité $f(x)$, car nous pouvons l'écrire sous la forme $g(x) = w(x)f(x)$, avec $w(x) = e^{hx}/M_X(h)$, c'est-à-dire que nous attribuons un poids $w(x)$ à chaque valeur x . Puisque $h > 0$ et $w'(x) > 0$, alors le poids augmente lorsque x augmente.

La fonction de répartition de la variable aléatoire \tilde{X} est donnée par

$$\begin{aligned} G_{\tilde{X}}(x) &= \int_0^x w(y)f(y)dy \\ &= \frac{\int_0^x e^{hy}f(y)dy}{M_X(h)}. \end{aligned}$$

Cette fonction est appelée la transformée d'Esscher de la fonction de répartition de X avec le paramètre h .

Nous pouvons calculer la fonction génératrice des moments de la variable \tilde{X} , à partir de la fonction génératrice des moments de la variable X , comme suit

$$M_{\tilde{X}}(t) = \int_0^\infty e^{tx}g(x)dx.$$

De l'équation (4.6), nous avons

$$\begin{aligned} M_{\tilde{X}}(t) &= \int_0^\infty e^{tx}g(x)dx \\ &= \frac{\int_0^\infty e^{tx}e^{hx}f(x)dx}{\int_0^\infty e^{hx}f(x)dx} \\ &= \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

La prime d'Esscher Π_X est calculée à partir de la relation dans l'équation (4.7). Pour $h = 0$, nous avons $M_{\tilde{X}}(t) = M_X(t)$, donc $E[\tilde{X}] = \Pi_X = E[X]$. De façon générale,

$$\begin{aligned}
E[\tilde{X}^n] &= \left. \frac{d^n}{dt^n} M_{\tilde{X}}(t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d^n}{dt^n} \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \right|_{t=0} \\
&= \frac{M_X^{(n)}(h)}{M_X(h)}. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Le principe d'Esscher satisfait la propriété de marge de sécurité positive. À partir de la formule (4.8), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh} \Pi_X &= \frac{d}{dh} E[\tilde{X}] = \frac{d}{dh} \frac{M'_X(h)}{M_X(h)} \\
&= \frac{M_X^{(2)}(h)M_X(h)}{M_X(h)^2} - \frac{M'_X(h)^2}{M_X(h)^2} \\
&= E[\tilde{X}^2] - E[\tilde{X}]^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, Π_X est une fonction non décroissante de h , donc $\Pi_X \geq E[X]$, pour tout $h \geq 0$.

D'autre part, le principe d'Esscher satisfait la propriété de cohérence. Soit $Y = X + c$, la prime d'Esscher de la variable Y s'écrit

$$\begin{aligned}
\Pi_Y &= \frac{E[Y e^{hY}]}{E[e^{hY}]} = \frac{E[(X+c)e^{h(X+c)}]}{E[e^{h(X+c)}]} \\
&= \frac{E[X e^{h(X)}] e^{hc} + c E[e^{h(X)}] e^{hc}}{E[e^{h(X)}] e^{hc}} \\
&= \frac{E[X e^{hX}]}{E[e^{hX}]} + c = \Pi_X + c.
\end{aligned}$$

Le principe d'Esscher satisfait également la propriété d'additivité

$$\begin{aligned}
\Pi_{X_1+X_2} &= \frac{E[(X_1 + X_2)e^{hX_1+X_2}]}{E[e^{hX_1+X_2}]} \\
&= \frac{E[(X_1)e^{h(X_1)}] E[e^{h(X_2)}] + E[(X_2)e^{h(X_2)}] E[e^{h(X_1)}]}{E[e^{h(X_1)}] E[e^{h(X_2)}]} \\
&= \frac{E[X_1 e^{hX_1}]}{E[e^{hX_1}]} + \frac{E[X_2 e^{hX_2}]}{E[e^{hX_2}]} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}.
\end{aligned}$$

La propriété de plafonnement est aussi satisfaite puisque si x_m est le plus grand montant de réclamation possible, de sorte que $P(X \leq x_m) = 1$, alors

$$Xe^{hX} \leq x_m e^{hx_m},$$

$$\Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \leq \frac{E[x_m e^{hx_m}]}{E[e^{hx_m}]} = x_m.$$

Cependant, le principe d'Esscher n'est pas invariant à l'échelle. Soit $Z = aX$, la prime d'Esscher

$$\Pi_Z(h) = \frac{E[Ze^{hZ}]}{E[e^{hZ}]} \Pi_Y = \frac{E[aXe^{haX}]}{E[e^{haX}]} = a\Pi_X(ah) \neq \Pi_X(ah).$$

La transformée d'Esscher peut transformer les distributions de famille de dispersion exponentielle, à cet effet, voici quelques exemples qui sont donnés dans (Kaas et al., 2008)

1. $\mathcal{N}(0, 1)$ en $\mathcal{N}(\mu, 1)$, pour $h = \mu$;
2. $\mathcal{P}(1)$ en $\mathcal{P}(\mu)$, lorsque $h = \log \mu$;
3. $\mathcal{B}(m, 1/2)$ en $\mathcal{B}(m, p)$, lorsque $p = 1/(1 + e^{-h})$, donc $h = \log[p/(1 - p)]$;
4. $\mathcal{BN}(r, 1/2)$ en $\mathcal{BN}(r, p)$, lorsque $p = 1 - \frac{1}{2}e^h$, donc $h = \log[2(1 - p)]$;
5. $\text{Gamma}(1, 1)$ en $\text{Gamma}(1, \beta)$, lorsque $h = 1 - \beta$;
6. $\mathcal{IG}(1, 1)$ en $\mathcal{IG}(\alpha, 2\alpha)$, lorsque $\alpha = \sqrt{1 - 2h}$, donc $h = (1 - 2\alpha)/2$.

Dans le cas d'une distribution Tweedie, la fonction génératrice des moments est donnée par

$$M_X(h) = \exp \{ \lambda [(1 - h\gamma)^\alpha - 1] \}.$$

avec $\alpha = (2 - p)/(1 - p)$, $\lambda = \mu^{(2-p)}/\phi(2 - p)$ et $\gamma = \phi(p - 1)\mu^{(p-1)}$. Donc la fonction $g(x)$, dans la formule (4.6), devient

$$g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{\exp \{ \lambda [(1 - h\gamma)^\alpha - 1] \}} \quad (4.9)$$

À partir de la formule (4.7), la fonction génératrice des moments, d'une distribution Tweedie, pour un risque \tilde{X} s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} M_{\tilde{X}}(t) &= \frac{M_X(t + h)}{M_X(h)} \\ &= \frac{\exp \{ \lambda [(1 - (t + h)\gamma)^\alpha - 1] \}}{\exp \{ \lambda [(1 - h\gamma)^\alpha - 1] \}} \\ &= \exp \{ \lambda [(1 - (t + h)\gamma)^\alpha - (1 - h\gamma)^\alpha] \}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La figure 4.6 illustre les courbes des deux fonctions, $f(x)$ et $g(x)$, où f représente la fonction de densité de la distribution Tweedie pour un échantillon de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance automobile, alors que g est la fonction pondérée de la fonction f , obtenue par la transformée d'Esscher de la fonction f .

La fonction de poids $w(x)$ dans $g(x)$ met plus de masse sur les grandes valeurs de X , ce qui implique un chargement de sécurité. Nous observons sur la figure 4.6 que la densité $g(x)$ est inférieure à la densité $f(x)$; cependant, la densité $g(x)$ est supérieure à la densité $f(x)$ dans la queue, de sorte que la transformation se traduit par une densité avec une queue plus grosse, ceci rend le risque moins attrayant pour l'assureur.

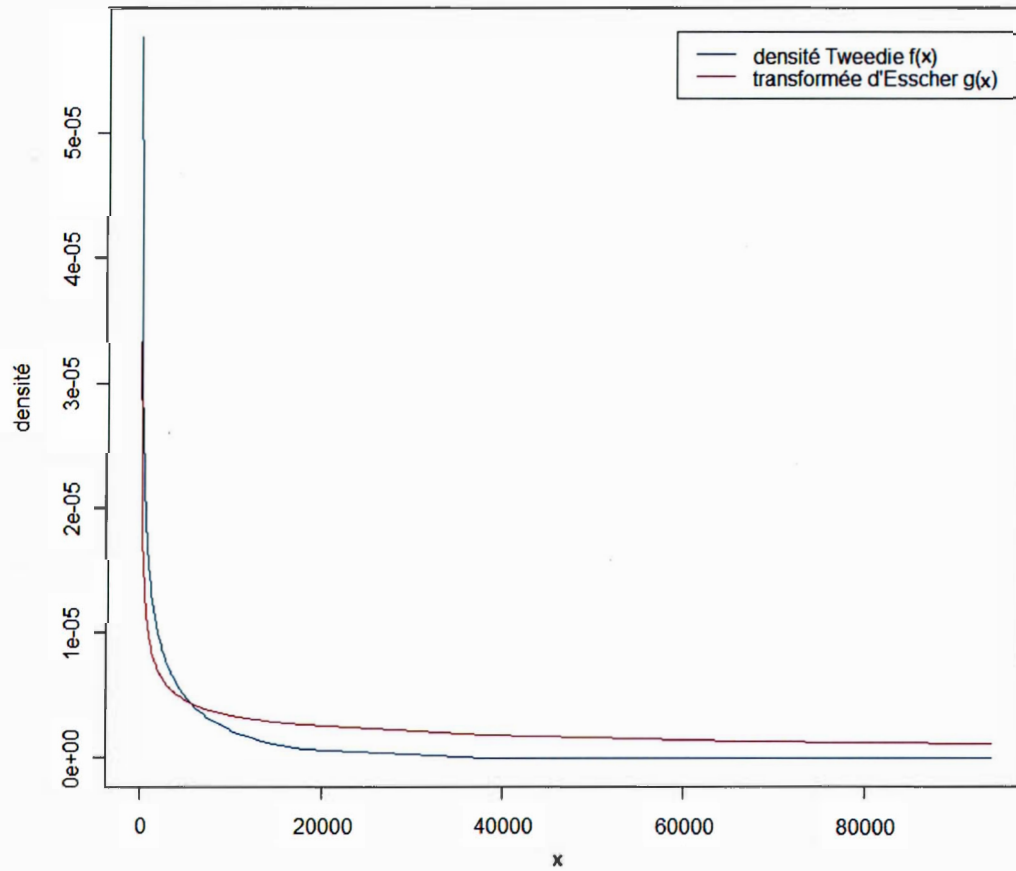


Figure 4.6 Graphique qui représente la densité de la distribution Tweedie $f(x)$ et la transformée d'Esscher de cette densité $g(x)$, pour $h = 0.0001$. À partir d'un échantillon aléatoire de 1000 observations des réclamations individuelles d'assurance automobile, nous estimons les paramètres de la densité Tweedie, $\hat{p} = 1.64$, $\hat{\mu} = 536.73$, $\hat{\phi} = 262.18$. Pour mieux voir le rôle de la transformée d'Esscher, les observations qui sont des zéros sont enlevées sur la figure, et la masse de ces observations est de 0.9044.

Les valeurs des paramètres de la distribution Tweedie, selon cet échantillon, sont $\alpha = -0.553$, $\lambda = 0.1004463$ et $\gamma = 9661.078$. Donc, la fonction génératrice des moments $M_Y(h) = 1.7377$, pour $h = 0.0001$.

En utilisant l'équation (4.5), la prime d'Esscher pour la distribution Tweedie est comme suit

$$\begin{aligned}\Pi_X &= \frac{d}{dh} \log M_X(h) \\ &= \frac{d}{dh} \{ \lambda [(1 - h\gamma)^\alpha - 1] \} \\ &= \lambda [\alpha(-\gamma)(1 - h\gamma)^{\alpha-1}].\end{aligned}$$

Dans le cas de notre échantillon, le calcul de la prime donne $\Pi_X = 102954.3$, pour $h = 0.0001$. Le paramètre h est choisi selon l'intérêt de l'assureur.

Tableau 4.4 Calcul de la prime pour différentes valeurs de h .

h	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
Π_X	102954.3	628.47	544.88	537.54	536.81	536.74	536.73	536.73

Le paramètre h d'Esscher reflète le degré d'aversion du risque pour l'assureur. Le tableau 4.4 représente les valeurs de la prime Π_X en fonction du paramètre h . Nous observons dans le tableau 4.4 que les valeurs de la prime deviennent stables et égales à la moyenne à partir de $h = 10^{-10}$ (h proche de zero). La figure 4.7 montre comment la prime est stable pour les très petites valeurs de h , ce qui confirme que $E[\tilde{X}] = \Pi_X = E[X]$ pour $h = 0$.

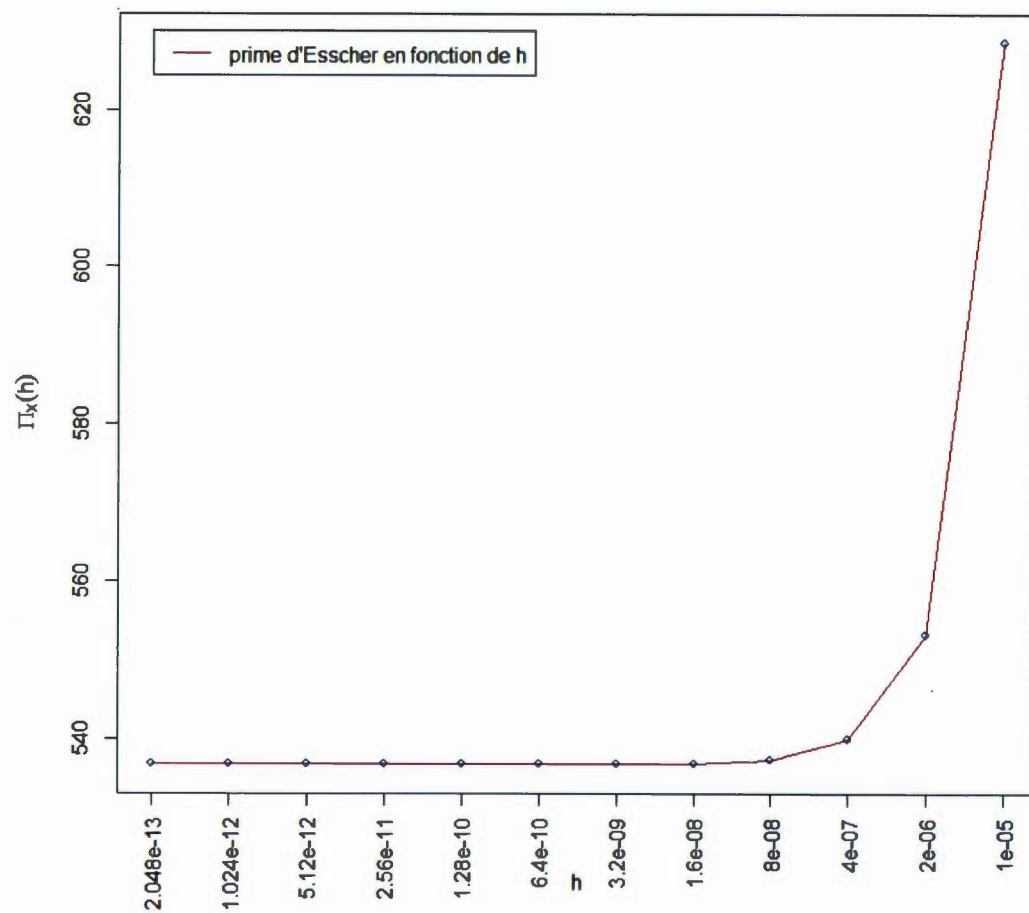


Figure 4.7 Graphique représentant la prime d'Esscher Π_X en fonction du paramètre h .

CONCLUSION

La distribution de Poisson composée, et en particulier la distribution Tweedie sont de plus en plus importantes et utilisées dans les études actuarielles.

L'évaluation de la densité Tweedie nécessite une méthode d'approximation, car elle n'a pas une forme analytique simple. En se basant sur les études effectuées par Dunn et Smyth (1996 - 2008), nous constatons que la distribution Tweedie peut être approximée, avec précision, par l'une des deux méthodes suivantes : la première est l'inversion de la fonction génératrice des cumulants, qui implique l'évaluation d'une intégrale oscillatoire infinie, et la deuxième méthode consiste dans l'évaluation d'une somme infinie qui est basée sur un développement en séries infinies.

Ces deux méthodes approximent la densité avec précision et fonctionnent mieux dans différentes régions de l'espace des paramètres. Lorsque la puissance p est proche de 2, $z \rightarrow \infty$ ou $\phi \rightarrow 0$, l'approche du développement en séries infinies échoue, car le nombre des termes nécessaires dans la série, augmente sans limite ; dans ce cas, la méthode d'inversion de Fourier devient alors la seule solution et fournit un moyen pour évaluer la densité Tweedie. Entre autres, la méthode d'inversion est meilleure pour les grandes valeurs de z et la méthode de développement en série est meilleure pour les petites valeurs de z . Nous pouvons donc dire que la méthode d'inversion de Fourier et la méthode de développement en séries sont complémentaires pour les différentes valeurs des paramètres, et permettent ensemble d'évaluer la densité de Tweedie avec précision.

À l'aide de la méthode d'interpolation, qui est basée sur l'approximation de point-

selle et les deux approches précédentes, [Dunn \(2007\)](#) a combiné entre ces deux méthodes pour fournir une évaluation complète des densités de Tweedie sur l'espace des paramètres.

L'utilisation de la distribution de Tweedie, dans la modélisation des réclamations d'assurance automobile, montre que le modèle s'ajuste bien aux données observées, et par conséquent, la distribution Tweedie est suggérée pour modéliser les coûts individuels d'assurance.

Enfin, la densité de la distribution Tweedie nous a permis de faire une application en assurance, plus précisément de calculer la transformée d'Esscher, qui rend le risque moins attrayant pour l'assureur, et de calculer la prime d'assurance en fonction du paramètre d'Esscher h , qui reflète le degré d'aversion du risque pour l'assureur.

BIBLIOGRAPHIE

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. *et al.* (1966). Handbook of mathematical functions. *Applied mathematics series*, 55, 62.
- Bar-Lev, S. K., Enis, P. *et al.* (1986). Reproducibility and natural exponential families with power variance functions. *The Annals of Statistics*, 14(4), 1507–1522.
- Bar-Lev, S. K. et Stramer, O. (1987). Characterizations of natural exponential families with power variance functions by zero regression properties. *Probability theory and related fields*, 76(4), 509–522.
- Boland, P. J. (2007). *Statistical and probabilistic methods in actuarial science*. CRC Press.
- Bühlmann, H. (1980). An economic premium principle. *Astin Bulletin*, 11(11), 52–60.
- Burden, R. L. et Faires, J. D. (2011). *Numerical analysis* (9th ed éd.). Brooks/Cole Cengage Learning.
- Davis, P. J. et Rabinowitz, P. (2007). *Methods of numerical integration*. Courier Corporation.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. et Kaas, R. (2006). *Actuarial theory for dependent risks : measures, orders and models*. John Wiley & Sons.
- Dickson, D. C. (2005). *Insurance risk and ruin*. Cambridge University Press.
- Doucet, E. (2014). Estimateurs à noyau et théorie des valeurs extrêmes : comparaison de leur pouvoir prédictif dans l'analyse du coût des réclamations en assurance automobile.
- Droesbeke, J.-J., Lejeune, M. et Saporta, G. (2005). *Modèles statistiques pour données qualitatives*. Editions Technip.
- Dunn, M. P. K. (2007). The tweedie package.
- Dunn, Peter K, M. P. K. (2013). Package 'tweedie'. *R package version*, 2(7).

- Dunn, P. K. (2001). Likelihood-based inference for tweedie generalized linear models.
- Dunn, P. K. (2004). Occurrence and quantity of precipitation can be modelled simultaneously. *International Journal of Climatology*, 24(10), 1231–1239.
- Dunn, P. K. et Smyth, G. K. (1996). Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3), 236–244.
- Dunn, P. K. et Smyth, G. K. (2001). Tweedie family densities : methods of evaluation. Dans *Proceedings of the 16th International Workshop on Statistical Modelling*, 2–6. Odense, Denmark.
- Dunn, P. K. et Smyth, G. K. (2005). Series evaluation of tweedie exponential dispersion model densities. *Statistics and Computing*, 15(4), 267–280.
- Dunn, P. K. et Smyth, G. K. (2008). Evaluation of tweedie exponential dispersion model densities by fourier inversion. *Statistics and Computing*, 18(1), 73–86.
- Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications : volume I*, volume 3. John Wiley & Sons London-New York-Sydney-Toronto.
- Fortin, A. (2011). *Analyse numérique pour ingénieurs*. Presses inter Polytechnique.
- Frees, E. W. (2009). *Regression modeling with actuarial and financial applications*. Cambridge University Press.
- Gareth W. Peters, P. V. S. (2015). *Advances in Heavy Tailed Risk Modeling : A Handbook of Operational Risk* (1 éd.). Wiley Handbooks in Financial Engineering and Econometrics. Wiley.
- George B. Arfken, Hans J. Weber, F. E. H. (2014). *Instructor's Manual : Mathematical Methods for Physicists* (7 éd.). Elsevier.
- Gerber, H. U. (1980). A characterization of certain families of distributions via esscher transforms and independence. *Journal of the American Statistical Association*, 75(372), 1015–1018.
- Gerber, H. U., Shiu, E. S. et al. (1994). Option pricing by esscher transforms. *Transactions of the Society of Actuaries*, 46(99), 140.
- Gilchrist, R. et Drinkwater, D. (1999). Fitting tweedie models to data with probability of zero responses. Dans *Proceedings of the 14th International Workshop on Statistical Modelling, Graz*, volume 19-23, 207–214.

- Goovaerts, M., De Vylder, F. et Haezendonck, J. (1984). Insurance premiums.
- Hasan, M. M. et Dunn, P. K. (2010). A simple poisson–gamma model for modelling rainfall occurrence and amount simultaneously. *Agricultural and forest meteorology*, 150(10), 1319–1330.
- Hasan, M. M. et Dunn, P. K. (2011). Two tweedie distributions that are near-optimal for modelling monthly rainfall in australia. *International Journal of Climatology*, 31(9), 1389–1397.
- Hasan, M. M. et Dunn, P. K. (2015). Seasonal rainfall totals of australian stations can be modelled with distributions from the tweedie family. *International Journal of Climatology*, 35(10), 3093–3101.
- Hougaard, P. (1986). Survival models for heterogeneous populations derived from stable distributions. *Biometrika*, 73(2), 387–396.
- Jedrzejewski, F. (2005). *Introduction aux méthodes numériques* (2 éd.). Springer.
- Jorgensen, B. (1987). Exponential dispersion models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 127–162.
- Jorgensen, B. (1992). *The theory of exponential dispersion models and analysis of deviance*. Numéro 51. Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Jorgensen, B. (1997). *The theory of dispersion models*. CRC Press.
- Jørgensen, B. et Paes De Souza, M. C. (1994). Fitting tweedie's compound poisson model to insurance claims data. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1994(1), 69–93.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. et Denuit, M. (2008). *Modern actuarial risk theory : using R*, volume 128. Springer Science & Business Media.
- Keller, A. (2008). *Applying Robust Scale M-Estimators to Compute Credibility Premiums in the Large Claim Case*. Logos Verlag Berlin GmbH.
- King, N. A. M. (2010). *Numerical and Statistical Methods for Bioengineering : Applications in MATLAB (Cambridge Texts in Biomedical Engineering)* (1 éd.). Cambridge University Press.
- Krzanowski, W. J. (1998). *An Introduction to Statistical Modelling*. Arnold, a member of the Hodder Headline Group.

- Lindsey, J. K. (2000). *Applying Generalized Linear Models* (corrected éd.). Springer Texts in Statistics. Springer.
- Madsen, H. et Thyregod, P. (2010). *Introduction to general and generalized linear models*. CRC Press.
- Melnick, E. L. et Everitt, B. S. (2008). *Encyclopedia of quantitative risk analysis and assessment*, volume 1. John Wiley & Sons.
- Nelder, J. A. et Baker, R. J. (1972). Generalized linear models. *Encyclopedia of statistical sciences*.
- Nelder, J. A. et Pregibon, D. (1987). An extended quasi-likelihood function. *Biometrika*, 74(2), 221–232.
- Parzen, E. (1999). *Stochastic Processes*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial Mathematics.
- Peters, G. W. et Shevchenko, P. V. (2015). *Advances in Heavy Tailed Risk Modeling : A Handbook of Operational Risk*. John Wiley & Sons.
- Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E., Überhuber, C. W. et Kahaner, D. K. (1983). *Quadpack : a subroutine package for automatic integration*, volume 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. et Flannery, B. P. (1996). *Numerical recipes in C*, volume 2. Cambridge university press Cambridge.
- Rabinowitz, A. R. P. (2001). *A first course in numerical analysis* (2 éd.). Dover Publications.
- Sidi, A. (1980). Extrapolation methods for oscillatory infinite integrals. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 26(1), 1–20.
- Sidi, A. (1988). A user-friendly extrapolation method for oscillatory infinite integrals. *Mathematics of Computation*, 51(183), 249–266.
- Sidi, A. (1997). Computation of infinite integrals involving bessel functions of arbitrary order by the d-transformation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 78(1), 125 – 130.
- Sidi, A. (2003). *Practical extrapolation methods : Theory and applications*, volume 10. Cambridge University Press.
- Siegel, A. F. (1979). The noncentral chi-squared distribution with zero degrees of freedom and testing for uniformity. *Biometrika*, 66(2), 381–386.

- Siegel, A. F. (1985). Modelling data containing exact zeroes using zero degrees of freedom. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 267–271.
- Smyth, G. K. (1996). Regression analysis of quantity data with exact zeros. Dans *Proceedings of the Second Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management, Gold Coast, Australia*, 17–19.
- Smyth, G. K. et Jørgensen, B. (2002). Fitting tweedie's compound poisson model to insurance claims data : dispersion modelling. *Astin Bulletin*, 32(01), 143–157.
- Smyth, G. K. et Verbyla, A. P. (1999). Adjusted likelihood methods for modelling dispersion in generalized linear models. *Environmetrics*, 10(6), 695–709.
- Teugels, B. S. (2004). *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley.
- Woodford, C. et Phillips, C. (2011). *Numerical methods with worked examples : Matlab edition*. Springer Science & Business Media.
- Wüthrich, M. V. et Merz, M. (2008). *Stochastic claims reserving methods in insurance*, volume 435. John Wiley & Sons.